

习题 8-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集? 并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

$$(1)\{(x, y)|x \neq 0, y \neq 0\};$$

解 开集, 无界集, 导集为 \mathbf{R}^2 , 边界为 $\{(x, y)|x=0 \text{ 或 } y=0\}$.

$$(2)\{(x, y)|1 < x^2 + y^2 \leq 4\};$$

解 既非开集, 又非闭集, 有界集, 导集为 $\{(x, y)|1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$,
边界为 $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 1 \text{ 或 } x^2 + y^2 = 4\}$.

$$(3)\{(x, y)|y > x^2\};$$

解 开集, 区域, 无界集, 导集为 $\{(x, y)|y \geq x^2\}$, 边界为 $\{(x, y)|y = x^2\}$.

$$(4)\{(x, y)|x^2 + (y-1)^2 \geq 1\} \cap \{(x, y)|x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}.$$

解 闭集, 有界集, 导集与集合本身相同,
边界为 $\{(x, y)|x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y)|x^2 + (y-2)^2 = 4\}$.

2. 已知函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$, 试求 $f(tx, ty)$.

$$\text{解 } f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx) \cdot (ty) \cdot \left(\tan \frac{tx}{ty}\right)$$

$$= t^2 \left(x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y} \right) = t^2 f(x, y).$$

3. 试证函数 $F(x, y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式:

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

证明 $F(xy, uv) = \ln((x, y) \cdot \ln(uv))$

$$= (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v)$$

$$= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v$$

$$= F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

4. 已知函数 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$, 试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

$$\text{解 } f(x+y, x-y, xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)}$$

$$= (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}.$$

5. 求下列各函数的定义域:

$$(1) z = \ln(y^2 - 2x + 1);$$

解 要使函数有意义, 必须 $y^2-2x+1>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y)|y^2-2x+1>0\}$.

$$(2) z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}};$$

解 要使函数有意义, 必须 $x+y>0, x-y>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y)|x+y>0, x-y>0\}$.

$$(3) z = \sqrt{x-\sqrt{y}};$$

解 要使函数有意义, 必须 $y\geq 0, x-\sqrt{y}\geq 0$ 即 $x\geq\sqrt{y}$, 于是有 $x\geq 0$ 且 $x^2\geq y$,
故函数定义域为 $D=\{(x, y)|x\geq 0, y\geq 0, x^2\geq y\}$.

$$(4) z = \ln(y-x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}};$$

解 要使函数有意义, 必须 $y-x>0, x\geq 0, 1-x^2-y^2>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y)|y-x>0, x\geq 0, x^2+y^2<1\}$.

$$(5) u = \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}} \quad (R>r>0);$$

解 要使函数有意义, 必须 $R^2-x^2-y^2-z^2\geq 0$ 且 $x^2+y^2+z^2-r^2>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y, z)|r^2<x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$.

$$(6) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

解 要使函数有意义, 必须 $x^2+y^2\neq 0$, 且 $|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}|\leq 1$ 即 $z^2\leq x^2+y^2$,

故函数定义域为 $D=\{(x, y, z)|z^2\leq x^2+y^2, x^2+y^2\neq 0\}$.

6. 求下列各极限:

$$(1) \lim_{(x,y)\rightarrow(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2};$$

$$\text{解} \quad \lim_{(x,y)\rightarrow(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1.$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{(2+\sqrt{xy+4})} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}+1)(\sqrt{xy+1}-1)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{xy+1}+1) = 2. \end{aligned}$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin(xy)}{y};$$

$$\text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot x = 1 \cdot 2 = 2.$$

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2y^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1} = 0. \end{aligned}$$

7. 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x+y}{x-y};$$

证明 如果动点 $p(x, y)$ 沿 $y=0$ 趋向 $(0, 0)$,

$$\text{则} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1;$$

如果动点 $p(x, y)$ 沿 $x=0$ 趋向 $(0, 0)$,

$$\text{则} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{-y} = -1.$$

因此, 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}.$$

证明 如果动点 $p(x, y)$ 沿 $y=x$ 趋于 $(0, 0)$,

$$\text{则} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1;$$

如果动点 $p(x, y)$ 沿 $y=2x$ 趋向 $(0, 0)$,

$$\text{则} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=2x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4}{4x^4 + x^2} = 0.$$

因此, 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$ 不存在.

$$8. \text{ 函数 } z = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x} \text{ 在何处间断?}$$

解 因为当 $y^2 - 2x = 0$ 时, 函数无意义,

所以在 $y^2 - 2x = 0$ 处, 函数 $z = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ 间断.

$$9. \text{ 证明 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

证明 因为 $|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$

所以 $0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0.$

因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

证明 因为 $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, 故 $|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = 2\varepsilon$, 当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时恒有

$$|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon,$$

所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

10. 设 $F(x, y) = f(x)$, $f(x)$ 在 x_0 处连续, 证明: 对任意 $y_0 \in \mathbf{R}$, $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

证明 由题设知, $f(x)$ 在 x_0 处连续, 故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

作 (x_0, y_0) 的邻域 $U((x_0, y_0), \delta)$, 显然当 $(x, y) \in U((x_0, y_0), \delta)$ 时, $|x - x_0| < \delta$, 从而

$$|F(x, y) - F(x_0, y_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

所以 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

又因为 y_0 是任意的, 所以对任意 $y_0 \in \mathbf{R}$, $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

习题 8-2

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^3y - y^3x;$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2.$$

$$(2) s = \frac{u^2 + v^2}{uv};$$

$$\text{解 } \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \right) = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \right) = -\frac{u}{v^2} + \frac{1}{u}.$$

$$(3) z = \sqrt{\ln(xy)};$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{\ln x + \ln y}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln x + \ln y}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}.$$

$$\text{同理 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}.$$

$$(4) z = \sin(xy) + \cos^2(xy);$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y + 2\cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot y = y[\cos(xy) - \sin(2xy)]$$

根据对称性可知

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x[\cos(xy) - \sin(2xy)].$$

$$(5) z = \ln \tan \frac{x}{y};$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y} \csc \frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{2x}{y^2} \csc \frac{2x}{y}.$$

$$(6) z = (1+xy)^y;$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = y(1+xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1+xy)^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^{y \ln(1+xy)} = e^{y \ln(1+xy)} [\ln(1+xy) + y \cdot \frac{x}{1+xy}]$$

$$=(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}].$$

$$(7) u=x^{\frac{y}{z}};$$

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\ln x(-\frac{y}{z^2})=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x.$$

$$(8) u=\arctan(x-y)^z;$$

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

$$2. \text{ 设 } T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ 试证 } l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0.$$

$$\text{解 因为 } \frac{\partial T}{\partial l}=\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{g}\cdot l}, \quad \frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\sqrt{l}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot g^{-\frac{3}{2}}=-\pi\cdot\frac{\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}, \text{ 所以}$$

$$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}-\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}=0.$$

$$3. \text{ 设 } z=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}, \text{ 求证 } x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

$$\text{解 因为 } \frac{\partial z}{\partial x}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\cdot\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\cdot\frac{1}{y^2}, \text{ 所以}$$

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}+e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}=2z$$

$$4. \text{ 设 } f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ 求 } f_x(x,1).$$

解 因为 $f(x, 1) = x + (1-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1}} = x$, 所以 $f_x(x, 1) = \frac{d}{dx}f(x, 1) = 1$.

5. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线与正向 x 轴所成的倾角是多少?

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,4,5)} = 1 = \tan \alpha,$$

$$\text{故 } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

6. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$(1) z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2;$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4y^3 - 8x^2y) = -16xy.$$

$$(2) z = \arctan \frac{y}{x};$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$(3) z = y^x.$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \ln^2 y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^x \ln y) = xy^{x-1} \ln y + y^x \cdot \frac{1}{y} = y^{x-1}(x \ln y + 1).$$

7. 设 $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, 求 $f_{xx}(0, 0, 1), f_{xz}(1, 0, 2), f_{yz}(0, -1, 0)$ 及 $f_{zzx}(2, 0, 1)$.

解 因为 $f_x = y^2 + 2xz, f_{xx} = 2z, f_{xz} = 2x,$

$$f_y = 2xy + z^2, f_{yz} = 2z,$$

$$f_z = 2yz + x^2, f_{zz} = 2y, f_{zzx} = 0,$$

所以 $f_{xx}(0, 0, 1) = 2, f_{xz}(1, 0, 2) = 2,$

$$f_{yz}(0, -1, 0) = 0, f_{zzx}(2, 0, 1) = 0.$$

8. 设 $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + x \cdot \frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证:

(1) $y = e^{-kn^2 t} \sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$;

证明 因为 $\frac{\partial y}{\partial t} = e^{-kn^2 t} \cdot \sin nx \cdot (-kn^2) = -kn^2 e^{-kn^2 t} \cdot \sin nx,$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = ne^{-kn^2 t} \cos nx, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -n^2 e^{-kn^2 t} \sin nx,$$

$$k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -kn^2 e^{-kn^2 t} \sin nx,$$

所以 $\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}.$

证明 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r - x \frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3},$

由对称性知

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - z^2}{r^3},$$

因此
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} &= \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} \\ &= \frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} = \frac{3r^2 - r^2}{r^3} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

习题 8-3

1. 求下列函数的全微分:

$$(1) z = xy + \frac{x}{y};$$

$$\text{解 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (y + \frac{1}{y})dx + (x - \frac{x}{y^2})dy.$$

$$(2) z = e^{\frac{y}{x}};$$

$$\text{解 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} dx + \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} dy.$$

$$(3) z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{解 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2} y (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\text{所以 } dz = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (ydx - xdy).$$

$$(4) u = x^{yz}.$$

$$\text{解 因为 } \frac{\partial u}{\partial x} = yz \cdot x^{yz-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx^{yz} \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = yx^{yz} \ln x,$$

$$\text{所以 } du = yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz$$

2. 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 当 $x=1, y=2$ 时的全微分.

$$\text{解 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1, y=2} = \frac{1}{3}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=1, y=2} = \frac{2}{3},$$

所以 $dz\Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy$.

3. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 因为 $\Delta z = \frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} - \frac{y}{x}$, $dz = -\frac{y}{x^2}\Delta x + \frac{1}{x}\Delta y$,

所以, 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时,

$$\Delta z = \frac{1+(-0.2)}{2+0.1} - \frac{1}{2} = -0.119,$$

$$dz = -\frac{1}{4} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times (-0.2) = -0.125.$$

4. 求函数 $z = e^{xy}$ 当 $x=1, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=0.1$ 时的全微分.

解 因为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = ye^{xy}\Delta x + xe^{xy}\Delta y$

所以, 当 $x=1, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=0.1$ 时,

$$dz = e \cdot 0.15 + e \cdot 0.1 = 0.25e$$

*5. 计算 $\sqrt{(102)^3 + (1.97)^3}$ 的近似值.

解 设 $z = \sqrt{x^3 + y^3}$, 由于

$$\sqrt{(x+\Delta x)^3 + (y+\Delta y)^3} \approx \sqrt{x^3 + y^3} + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \sqrt{x^3 + y^3} + \frac{3x^2\Delta x + 3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3 + y^3}},$$

所以取 $x=1, y=2, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.03$ 可得

$$\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3} \approx \sqrt{1+2^3} + \frac{3 \cdot 0.02 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}} = 2.95.$$

*6. 计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值 ($\ln 2 = 0.693$).

解 设 $z = x^y$, 由于

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y,$$

所以取 $x=2, y=1, \Delta x=-0.03, \Delta y=0.05$ 可得

$$(1.97)^{1.05} \approx 2 - 0.03 + 2\ln 2 \cdot 0.05 + 1.97 + 0.0693 \approx 2.093.$$

*7. 已知边长为 $x=6\text{m}$ 与 $y=8\text{m}$ 的矩形, 如果 x 边增加 5cm 而 y 边减少 10cm ,

问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\Delta z \approx dz = \frac{dz}{dx} \Delta x + \frac{dz}{dy} \Delta y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x\Delta x + y\Delta y),$$

当 $x=6, y=8, \Delta x=0.05, \Delta y=-0.1$ 时,

$$\Delta z \approx \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}} (6 \cdot 0.05 - 8 \cdot 0.1) = -0.05.$$

这个矩形的对角线大约减少 5cm.

*8. 设有一无盖圆柱形容器, 容器的壁与底的厚度均为 0.1cm, 内高为 20cm, 内半径为 4 厘米, 求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为 $V=\pi R^2 h$,

$$\Delta V \approx dV = 2\pi R h \Delta R + \pi R^2 \Delta h,$$

当 $R=4, h=20, \Delta R=\Delta h=0.1$ 时,

$$\Delta V \approx 2 \times 3.14 \times 4 \times 20 \times 0.1 + 3.14 \times 4^2 \times 0.1 \approx 55.3 (\text{cm}^3)$$

这个容器外壳的体积大约是 55.3cm^3 .

*9. 设有直角三角形, 测得其两腰的长分别为 $7 \pm 0.1 \text{cm}$ 和 $24 \pm 0.1 \text{cm}$, 试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边的长度分别为 x 和 y , 则斜边的长度为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$|\Delta z| \approx |dz| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x|\Delta x| + y|\Delta y|).$$

令 $x=7, y=24, |\Delta x| \leq 0.1, |\Delta y| \leq 0.1$, 则得斜边长度 z 的绝对误差约为

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}} (7 \cdot 0.1 + 24 \cdot 0.1) = 0.124 \text{ cm}.$$

*10. 测得一块三角形土地的两边长分别为 $63 \pm 0.1 \text{m}$ 和 $78 \pm 0.1 \text{m}$, 这两边的夹角为 $60^\circ \pm 1^\circ$, 试求三角形面积的近似值, 并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长为 x 和 y , 它们的夹角 z , 为则三角形面积为 $s = \frac{1}{2} xy \sin z$.

$$dS = \frac{1}{2} y \sin z dx + \frac{1}{2} x \sin z dy + \frac{1}{2} xy \cos z dz$$

$$|\Delta S| \approx |dS| \leq \frac{1}{2} y \sin z |dx| + \frac{1}{2} x \sin z |dy| + \frac{1}{2} xy \cos z |dz|.$$

令 $x=63, y=78, z=\frac{\pi}{3}, |dx|=0.1, |dy|=0.1, dz=\frac{\pi}{180}$, 则

$$\delta s \approx \frac{78}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{63}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{63 \times 78}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{180} = 27.55,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 78 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 2127.82,$$

$$\frac{\delta s}{S} = \frac{27.55}{2127.82} = 1.29\%, \text{ 所以三角形面积的近似值为 } 2127.82 \text{m}^2, \text{ 绝对误差为}$$

27.55 m^2 , 相对误差为 1.29% .

*11. 利用全微分证明: 两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

证明 设 $u=x+y$, 则

$$|\Delta u| \approx |du| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right| = |\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y|.$$

所以两数之和的绝对误差 $|\Delta u|$ 等于它们各自的绝对误差 $|\Delta x|$ 与 $|\Delta y|$ 的和.

*12. 利用全微分证明: 乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和; 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

证明 设 $u=xy, v=\frac{x}{y}$, 则 $\Delta u \approx du = ydx + xdy$,

$$\Delta v \approx dv = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

由此可得相对误差;

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right| \approx \left| \frac{du}{u} \right| = \left| \frac{ydx + xdy}{xy} \right| = \left| \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right| \leq \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|;$$

$$\left| \frac{\Delta v}{v} \right| = \left| \frac{dv}{v} \right| = \left| \frac{ydx - xdy}{y^2 \cdot \frac{x}{y}} \right| = \left| \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right| \leq \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|.$$

习题 8-4

1. 设 $z=u^2-v^2$, 而 $u=x+y, v=x-y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot 1 = 2(u+v) = 4x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot (-1) = 2(u-v) = 4y.$$

2. 设 $z=u^2 \ln v$, 而 $u=\frac{x}{y}, v=3x-2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3 = \frac{2x}{y^2} \ln(3x-2y) + \frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 2u \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v} \cdot (-2) = -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

3. 设 $z=e^{x-2y}$, 而 $x=\sin t, y=t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\text{解 } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x-2y} \cos t + e^{x-2y} \cdot (-2) \cdot 3t^2$$

$$= e^{x-2y} (\cos t - 6t^2) = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2).$$

4. 设 $z=\arcsin(x-y)$, 而 $x=3t, y=4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\text{解 } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 3 + \frac{-1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 12t^2$$

$$= \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

5. 设 $z=\arctan(xy)$, 而 $y=e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

$$\text{解 } \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2 y^2} + \frac{x}{1+x^2 y^2} \cdot e^x = \frac{e^x(1+x)}{1+x^2 e^{2x}}.$$

6. 设 $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y = a \sin x, z = \cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{du}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1} + \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot a \cos x - \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot (-\sin x) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a^2 \sin x - a \cos x + a \cos x + \sin x) = e^{ax} \sin x.\end{aligned}$$

7. 设 $z = \arctan \frac{x}{y}$, 而 $x = u+v, y = u-v$, 验证 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$.

$$\begin{aligned}\text{证明 } \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) + \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) \cdot (-1) \\ &= \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.\end{aligned}$$

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数):

(1) $u = f(x^2 - y^2, e^{xy})$;

解 将两个中间变量按顺序编为 1, 2 号,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= f'_1 \cdot \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} + f'_2 \cdot \frac{\partial(e^{xy})}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= f'_1 \cdot \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} + f'_2 \cdot \frac{\partial(e^{xy})}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2.\end{aligned}$$

(2) $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$;

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} &= f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{z} \right) = \frac{1}{y} f'_1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{z} \right) = -\frac{x}{y^2} f'_1 + \frac{1}{z} f'_2, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{y} \right) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{z} \right) = -\frac{y}{z^2} f'_2.\end{aligned}$$

(3) $u = f(x, xy, xyz)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot 1 + f'_2 \cdot y + f'_3 \cdot yz = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_2 \cdot x + f'_3 \cdot xz = xf'_2 + xzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f'_3 \cdot xy = xyf'_3.$$

9. 设 $z=xy+xF(u)$, 而 $u=\frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 证明 $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.

证明 $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x[y + F(u) + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial x}] + y[x + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial y}]$

$$= x[y + F(u) - \frac{y}{x} F'(u)] + y[x + F'(u)]$$

$$= xy + xF(u) + xy = z + xy.$$

10. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 为可导函数, 验证 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

证明 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y \cdot f' \cdot 2x}{f^2(u)} = \frac{-2xyf'}{f^2(u)},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(u) - y \cdot f' \cdot (-2y)}{f^2(u)} = \frac{1}{f(u)} + \frac{-2y^2 f'}{f^2(u)},$$

所以 $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yf'}{f^2 u} + \frac{2yf'}{f^2 u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{f(u)} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{z}{y^2}.$

11. 设 $z=f(x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 令 $u=x^2+y^2$, 则 $z=f(u)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = 2yf',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2f' + 4x^2 f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' + 2yf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2f' + 4yf''.$$

12. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数):

(1) $z=f(xy, y)$;

解 令 $u=xy, v=y$, 则 $z=f(u, v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 0 = y \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1 = x \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

因为 $f(u, v)$ 是 u 和 v 的函数, 所以 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 也是 u 和 v 的函数, 从而 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 是以 u 和 v 为中间变量的 x 和 y 的函数.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial f}{\partial u} \right) = y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \\ &= y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot y + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 0 \right) = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial f}{\partial u} \right) = 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} + y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} + y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 1 \right) = \frac{\partial f}{\partial u} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$= x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 1 \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot 1$$

$$= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

$$(2) z = f(x, \frac{x}{y});$$

解 令 $u=x$, $v=\frac{x}{y}$, 则 $z=f(u, v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dy} = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}.$$

因为 $f(u, v)$ 是 u 和 v 的函数, 所以 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 也是 u 和 v 的函数, 从而 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 是以 u 和 v 为中间变量的 x 和 y 的函数.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{2}{y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y^3} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{y^2} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{x^2}{y^4} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

$$(3) z=f(xy^2, x^2y);$$

$$\text{解 } z_x=f_1' \cdot y^2+f_2' \cdot 2xy=y^2 f_1'+2xy f_2',$$

$$z_y=f_1' \cdot 2xy+f_2' \cdot x^2=2xy f_1'+x^2 f_2';$$

$$z_{xx}=y^2[f_{11}'' \cdot y^2+f_{12}'' \cdot 2xy]+2yf_2''+2xy[f_{21}'' \cdot y^2+f_{22}'' \cdot 2xy]$$

$$=y^4 f_{11}''+2xy^3 f_{12}''+2yf_2''+2xy^3 f_{21}''+4x^2 y^2 f_{22}''$$

$$=y^4 f_{11}''+4xy^3 f_{12}''+2yf_2''+4x^2 y^2 f_{22}'',$$

$$z_{xy}=2y f_1'+y^2[f_{11}'' \cdot 2xy+f_{12}'' \cdot x^2]+2xf_2'+2xy[f_{21}'' \cdot 2xy+f_{22}'' \cdot x^2]$$

$$=2y f_1'+2xy^3 f_{11}''+x^2 y^2 f_{12}''+2xf_2'+4x^2 y^2 f_{21}''+2x^3 y f_{22}''$$

$$=2y f_1'+2xy^3 f_{11}''+5x^2 y^2 f_{12}''+2xf_2'+2x^3 y f_{22}'',$$

$$z_{yy}=2xf_1'+2xy[f_{11}'' \cdot 2xy+f_{12}'' \cdot x^2]+x^2[f_{21}'' \cdot 2xy+f_{22}'' \cdot x^2]$$

$$=2xf_1'+4x^2 y^2 f_{11}''+2x^3 y f_{12}''+2x^3 y f_{21}''+x^4 f_{22}''$$

$$=2xf_1'+4x^2 y^2 f_{11}''+4x^3 y f_{12}''+x^4 f_{22}''.$$

$$(4) z=f(\sin x, \cos y, e^{x+y}).$$

$$\text{解 } z_x=f_1' \cdot \cos x+f_3' \cdot e^{x+y}=\cos x f_1'+e^{x+y} f_3',$$

$$z_y=f_2' \cdot (-\sin y)+f_3' \cdot e^{x+y}=-\sin y f_2'+e^{x+y} f_3',$$

$$z_{xx}=-\sin x f_1'+\cos x \cdot (f_{11}'' \cdot \cos x+f_{13}'' \cdot e^{x+y})+e^{x+y} f_3'+e^{x+y} (f_{31}'' \cdot \cos x+f_{33}'' \cdot e^{x+y})$$

$$=-\sin x f_1'+\cos^2 x f_{11}''+e^{x+y} \cos x f_{13}''+e^{x+y} f_3'+e^{x+y} \cos x f_{31}''+e^{2(x+y)} f_{33}''$$

$$=-\sin x f_1'+\cos^2 x f_{11}''+2e^{x+y} \cos x f_{13}''+e^{x+y} f_3'+e^{2(x+y)} f_{33}'',$$

$$z_{xy}=\cos x [f_{12}'' \cdot (-\sin y)+f_{13}'' \cdot e^{x+y}]+e^{x+y} f_3'+e^{x+y} [f_{32}'' \cdot (-\sin y)+f_{33}'' \cdot e^{x+y}]$$

$$=-\sin y \cos x f_{12}''+e^{x+y} \cos x f_{13}''+e^{x+y} f_3'-e^{x+y} \sin y f_{32}''+e^{2(x+y)} f_{33}'$$

$$=-\sin y \cos x f_{12}''+e^{x+y} \cos x f_{13}''+e^{x+y} f_3'-e^{x+y} \sin y f_{32}''+e^{2(x+y)} f_{33}'',$$

$$z_{yy}=-\cos y f_2'-\sin y [f_{22}'' \cdot (-\sin y)+f_{23}'' \cdot e^{x+y}]+e^{x+y} f_3'+e^{x+y} [f_{32}'' \cdot (-\sin y)+f_{33}'' \cdot e^{x+y}]$$

$$=-\cos y f_2'+\sin^2 y f_{22}''-e^{x+y} \sin y f_{23}''+e^{x+y} f_3'-e^{x+y} \sin y f_{32}''+f_{33}'' \cdot e^{2(x+y)}$$

$$=-\cos y f_2'+\sin^2 y f_{22}''-2e^{x+y} \sin y f_{23}''+e^{x+y} f_3'+f_{33}'' \cdot e^{2(x+y)}.$$

$$13. \text{ 设 } u=f(x, y) \text{ 的所有二阶偏导数连续, 而 } x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2}, y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2},$$

$$\text{证明 } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \text{ 及 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

证明 因为

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

所以

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

习题 8-5

1. 设 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 令 $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2$, 则 $F_x = e^x - y^2$, $F_y = \cos y - 2xy$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^x - y^2}{\cos y - 2xy} = \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy}.$$

2. 设 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 令 $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}$, 则

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot (-\frac{y}{x^2}) = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

$$F_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y - x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{x + y}{x - y}.$$

3. 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = x + 2y + z - 2\sqrt{xyz}$, 则

$$F_x = 1 - \frac{yz}{\sqrt{xyz}}, \quad F_y = 2 - \frac{xz}{\sqrt{xyz}}, \quad F_z = 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

4. 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$,

解 令 $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, 则

$$F_x = \frac{1}{z}, \quad F_y = -\frac{1}{\frac{z}{y}} \cdot (-\frac{z}{y^2}) = \frac{1}{y}, \quad F_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{\frac{z}{y}} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{x + z}{z^2},$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{z}{x+z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z^2}{y(x+z)}.$

5. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

证明 设 $F(x, y, z) = 2\sin(x+2y-3z) - x - 2y + 3z$, 则

$$F_x = 2\cos(x+2y-3z) - 1,$$

$$F_y = 2\cos(x+2y-3z) \cdot 2 - 2 = 2F_x,$$

$$F_z = 2\cos(x+2y-3z) \cdot (-3) + 3 = -3F_x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_x}{-3F_x} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2F_x}{-3F_x} = \frac{2}{3},$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_x}{F_z} - \frac{F_z}{F_z} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$

6. 设 $x=x(y, z), y=y(x, z), z=z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数, 证明 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$

解 因为

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z},$$

所以 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \cdot \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) \cdot \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1.$

7. 设 $\varphi(u, v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程 $\varphi(cx-az, cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x, y)$ 满足

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

证明 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi_u \cdot c}{-\varphi_u \cdot a - \varphi_v \cdot b} = \frac{c\varphi_u}{a\varphi_u + b\varphi_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi_v \cdot c}{-\varphi_u \cdot a - \varphi_v \cdot b} = \frac{c\varphi_v}{a\varphi_u + b\varphi_v},$$

所以 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = a \cdot \frac{c \varphi_u}{a \varphi_u + b \varphi_v} + b \frac{c \varphi_v}{a \varphi_u + b \varphi_v} = c$.

8. 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x, y, z) = e^z - xyz$, 则

$$F_x = -yz, F_z = e^z - xy, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{y \frac{\partial z}{\partial x} (e^z - xy) - yz (e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y)}{(e^z - xy)^2} \\ &= \frac{y^2 z + (ye^z - xy^2 - yze^z) \frac{yz}{e^z - xy}}{(e^z - xy)^2} = \frac{2y^2 z e^z - 2xy^3 z - y^2 z^2 e^z}{(e^z - xy)^3}. \end{aligned}$$

9. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yz}{z^2 - xy} \right) \\ &= \frac{(z + y \frac{\partial z}{\partial y})(z^2 - xy) - yz(2z \frac{\partial z}{\partial y} - x)}{(z^2 - xy)^2} \\ &= \frac{(z + y \frac{xz}{z^2 - xy}) \cdot (z^2 - xy) - yz(2z \frac{xz}{z^2 - xy} - x)}{(z^2 - xy)^2} \\ &= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2 y^2)}{(z^2 - xy)^3}. \end{aligned}$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

(1) 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$;

解 视 $y=y(x)$, $z=z(x)$, 方程两边对 x 求导得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx} \\ 2x + 4y \frac{dy}{dx} + 6z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2y \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = -2x \\ 2y \frac{dy}{dx} + 3z \frac{dz}{dx} = -x \end{cases}.$$

解方程组得

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{3z+1}.$$

(2) 设 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$, 求 $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$;

解 视 $x=x(z)$, $y=y(z)$, 方程两边对 z 求导得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0 \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1 \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} = -2z \end{cases}.$$

解方程组得

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{y-z}{x-y}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{z-x}{x-y}.$$

(3) 设 $\begin{cases} u = f(ux, v+y) \\ v = g(u-x, v^2y) \end{cases}$, 其中 f, g 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$;

解 视 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, 方程两边对 x 求偏导得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1(u+x \frac{\partial u}{\partial x}) + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = g'_1(\frac{\partial u}{\partial x} - 1) + 2g'_2 y v \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (xf'_1 - 1) \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x} = -uf'_1 \\ g'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + (2yv g'_2 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} = g'_1 \end{cases}.$$

解之得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-uf'_1(2yv g'_2 - 1) - f'_2 g'_1}{(xf'_1 - 1)(2yv g'_2 - 1) - f'_2 g'_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g'_1(xf'_1 + uf'_1 - 1)}{(xf'_1 - 1)(2yv g'_2 - 1) - f'_2 g'_1}.$$

(4) 设 $\begin{cases} x=e^u+u\sin v \\ y=e^u-u\cos v \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

解 视 $u=u(x, y), v=v(x, y)$, 方程两边微分得

$$\begin{cases} dx=e^u du+\sin v du+u\cos v dv \\ dy=e^u du-\cos v du+u\sin v dv \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (e^u+\sin v)du+u\cos v dv=dx \\ (e^u-\cos v)du+u\sin v dv=dy \end{cases},$$

从中解出 du, dv 得

$$du=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}dx+\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}dy,$$

$$dv=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}dx+\frac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}dy,$$

从而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}, \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

11. 设 $y=f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t)=0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都有一阶连续偏导数, 试证明:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证明 由方程组 $\begin{cases} y=f(x, t) \\ F(x, y, t)=0 \end{cases}$ 可确定两个一元隐函数 $\begin{cases} y=y(x) \\ t=t(x) \end{cases}$, 方

程两边对 x 求导可得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} \\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx}=0 \end{cases},$$

移项得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \end{cases},$$

$$\text{在 } D = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \text{ 的条件下}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

习题 8-6

1. 求曲线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 处的切线及法平面方程.

解 $x'(t)=1-\cos t$, $y'(t)=\sin t$, $z'(t)=2\cos\frac{t}{2}$.

因为点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 所对应的参数为 $t=\frac{\pi}{2}$, 故在点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 处的切向量
为 $\boldsymbol{T}=(1, 1, \sqrt{2})$.

因此在点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 处, 切线方程为

$$\frac{x+1-\frac{\pi}{2}}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1\cdot(x-\frac{\pi}{2}+1)+1\cdot(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0, \text{ 即 } x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$$

2. 求曲线 $x=\frac{t}{1+t}$, $y=\frac{1+t}{t}$, $z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的切线及法平面方程.

解 $x'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}$, $y'(t)=-\frac{1}{t^2}$, $z'(t)=2t$.

在 $t=1$ 所对应的点处, 切向量 $\boldsymbol{T}=(\frac{1}{4}, -1, 2)$, $t=1$ 所对应的点为 $(\frac{1}{2}, 2, 1)$, 所以在 $t=1$ 所对应的点处, 切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}, \text{ 即 } \frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8};$$

法平面方程为

$$\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})-(y-2)+2(z-1)=0, \text{ 即 } 2x-8y+16z-1=0.$$

3. 求曲线 $y^2=2mx$, $z^2=m-x$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程的参数为 x , 将方程 $y^2=2mx$ 和 $z^2=m-x$ 的两边对 x 求导, 得

$$2y \frac{dy}{dx} = 2m, \quad 2z \frac{dz}{dx} = -1,$$

所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2z}.$

曲线在点 (x_0, y_0, z_0) 的切向量为 $\mathbf{T} = (1, \frac{m}{y_0}, -\frac{1}{2z_0})$, 所求的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}} = \frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}},$$

法平面方程为

$$(x-x_0) + \frac{m}{y_0}(y-y_0) - \frac{1}{2z_0}(z-z_0) = 0.$$

4. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程的参数为 x , 对 x 求导得,

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} - 3 = 0 \\ 2 - 3 \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = -2x + 3 \\ 3 \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dz}{dx} = 2 \end{cases}.$$

解此方程组得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x - 4z - 15}{-10y - 6z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{6x + 4y - 9}{-10y - 6z}.$$

因为 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1,1)} = \frac{9}{16}, \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{16}$, 所以 $\mathbf{T} = (1, \frac{9}{16}, \frac{1}{16})$.

所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{\frac{9}{16}} = \frac{z-1}{-\frac{1}{16}}, \quad \text{即} \quad \frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1};$$

法平面方程为

$$(x-1) + \frac{9}{16}(y-1) - \frac{1}{16}(z-1) = 0, \quad \text{即} \quad 16x + 9y - z - 24 = 0.$$

5. 求出曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点, 使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 已知平面的法线向量为 $\mathbf{n} = (1, 2, 1)$.

因为 $x'=1, y'=2t, z'=3t^2$, 所以参数 t 对应的点处的切向量为 $\mathbf{T} = (1, 2t, 3t^2)$.

又因为切线与已知平面平行, 所以

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ 即 } 1 + 4t + 3t^2 = 0,$$

解得 $t = -1$, $t = -\frac{1}{3}$. 于是所求点的坐标为 $(-1, 1, -1)$ 和 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$.

6. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z) = e^z - z + xy - 3$, 则

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z)|_{(2, 1, 0)} = (y, x, e^z - 1)|_{(2, 1, 0)} = (1, 2, 0),$$

点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为

$$1 \cdot (x - 2) + 2(y - 1) + 0 \cdot (z - 0) = 0, \text{ 即 } x + 2y - 4 = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 0}{0}.$$

7. 求曲面 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$, 则

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2ax, 2by, 2cz) = (ax, by, cz).$$

在点 (x_0, y_0, z_0) 处, 法向量为 (ax_0, by_0, cz_0) , 故切平面方程为

$$ax_0(x - x_0) + by_0(y - y_0) + cz_0(z - z_0) = 0,$$

即 $ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2$,

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{ax_0} = \frac{y - y_0}{by_0} = \frac{z - z_0}{cz_0}.$$

8. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 设 $F(x, y, z)=x^2+2y^2+z^2-1$, 则

$$\mathbf{n}=(F_x, F_y, F_z)=(2x, 4y, 2z)=2(x, 2y, z).$$

已知切平面的法向量为 $(1, -1, 2)$. 因为已知平面与所求切平面平行, 所以

$$\frac{x}{1}=\frac{2y}{-1}=\frac{z}{2}, \text{ 即 } x=\frac{1}{2}z, \quad y=-\frac{1}{4}z,$$

代入椭球面方程得

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2+2\left(-\frac{z}{4}\right)^2+z^2=1,$$

$$\text{解得 } z=\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}, \text{ 则 } x=\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}, \quad y=\mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

$$\text{所以切点坐标为 } \left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right).$$

所求切平面方程为

$$(x\pm\sqrt{\frac{2}{11}})-(y\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}})+2(z\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}})=0,$$

$$\text{即 } x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

9. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 xOy 面的法向为 $\mathbf{n}_1=(0, 0, 1)$.

令 $F(x, y, z)=3x^2+y^2+z^2-16$, 则点 $(-1, -2, 3)$ 处的法向量为

$$\mathbf{n}_2=(F_x, F_y, F_z)|_{(-1, -2, 3)}=(6x, 2y, 2z)|_{(-1, -2, 3)}=(-6, -4, 6).$$

点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+4^2+6^2}}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

10. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ ($a>0$) 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a .

证明 设 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$, 则 $\boldsymbol{n} = (\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}})$.

在曲面上任取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

即
$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}.$$

化为截距式, 得
$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1,$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a.$$

习题 8-7

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处沿从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数

解 因为从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2+\sqrt{3})$ 的向量为 $\boldsymbol{l}=(1, \sqrt{3})$, 故

$$\boldsymbol{e}_l = \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta).$$

又因为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2x|_{(1,2)} = 2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 2y|_{(1,2)} = 4,$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\beta = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}.$$

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1, 2)$ 处, 沿这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解 方程 $y^2=4x$ 两边对 x 求导得 $2yy'=4$, 解得 $y'=\frac{2}{y}$.

在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1, 2)$ 处, 切线的斜率为 $y'(1)=1$, 切向量为 $\boldsymbol{l}=(1, 1)$, 单位切向量为 $\boldsymbol{e}_l = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

又因为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \frac{1}{x+y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \frac{1}{x+y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3},$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\beta = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数 $z=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ 在点 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法

线方向的方向导数.

解 令 $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, 则 $F_x = \frac{2x}{a^2}$, $F_y = \frac{2y}{b^2}$.

从而点 (x, y) 处的法向量为

$$\mathbf{n} = \pm(F_x, F_y) = \pm\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right).$$

在 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ 处的内法向量为

$$\mathbf{n} = -\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)\bigg|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\sqrt{2}}{b}\right),$$

单位内法向量为

$$\mathbf{e}_n = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta).$$

又因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = \frac{2x}{a^2}\bigg|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = \frac{2y}{b^2}\bigg|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{b},$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\sqrt{2}}{b} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{ab} \sqrt{a^2+b^2}.$$

4. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处沿方向角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

解 因为方向向量为 $\mathbf{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, 又因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(1,1,2)} = (y^2 - yz)\bigg|_{(1,1,2)} = -1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(1,1,2)} = (2xy - xz)\bigg|_{(1,1,2)} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{(1,1,2)} = (3z^2 - xy)\bigg|_{(1,1,2)} = 11,$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 11 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

5. 求函数 $u=xyz$ 在点(5,1,2)处沿从点(5, 1, 2)到点(9, 4, 14)的方向的方向导数.

解 因为 $\mathbf{l}=(9-5, 4-1, 14-2)=(4, 3, 12)$, $\mathbf{e}_l=\frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}=(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13})$, 并且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(5,1,2)}=yz|_{(5,1,2)}=2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(5,1,2)}=xz|_{(5,1,2)}=10, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(5,1,2)}=xy|_{(5,1,2)}=5,$$

所以 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=2\cdot\frac{4}{13}+10\cdot\frac{3}{13}+5\cdot\frac{12}{13}=\frac{98}{13}.$

6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点(1, 1, 1)处, 沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导.

解 曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点(1, 1, 1)对应的参数为 $t=1$, 在点(1, 1, 1)的切线正方向为

$$\mathbf{l}=(1, 2t, 3t^2)|_{t=1}=(1, 2, 3), \quad \mathbf{e}_l=\frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}=(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}),$$

又 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2x|_{(1,1,1)}=2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2y|_{(1,1,1)}=2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=2z|_{(1,1,1)}=2,$

所以 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}.$

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 令 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-1$, 则球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的外法向量为

$$\mathbf{n}=(F_x, F_y, F_z)|_{(x_0, y_0, z_0)}=(2x_0, 2y_0, 2z_0),$$

$$\mathbf{e}_n=\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}=(x_0, y_0, z_0)=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

又 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=1,$

所以 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=1\cdot x_0+1\cdot y_0+1\cdot z_0=x_0+y_0+z_0.$

8. 设 $f(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$, 求 $\text{grad } f(0, 0, 0)$ 及 $\text{grad } f(1, 1, 1)$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+3, \frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-2, \frac{\partial f}{\partial z}=6z-6.$

因为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}=3, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0,0)}=-2, \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(0,0,0)}=-6,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1,1)}=6, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1,1)}=3, \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(0,1,1)}=0,$$

所以 $\mathbf{grad} f(0, 0, 0)=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k},$

$\mathbf{grad} f(1, 1, 1)=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}.$

9. 设 u, v 都是 x, y, z 的函数, u, v 的各偏导数都存在且连续, 证明

(1) $\mathbf{grad}(u+v)=\mathbf{grad} u + \mathbf{grad} v;$

$$\begin{aligned} \text{解 } \mathbf{grad}(u+v) &= \frac{\partial(u+v)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(u+v)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(u+v)}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\ &= \mathbf{grad} u + \mathbf{grad} v. \end{aligned}$$

(2) $\mathbf{grad}(uv)=v\mathbf{grad} u + u\mathbf{grad} v;$

$$\begin{aligned} \text{解 } \mathbf{grad}(uv) &= \frac{\partial(uv)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(uv)}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \left(v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(v\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\ &= v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\ &= v\mathbf{grad} u + u\mathbf{grad} v. \end{aligned}$$

(3) $\mathbf{grad}(u^2)=2u\mathbf{grad} u.$

$$\begin{aligned} \text{解 } \mathbf{grad}(u^2) &= \frac{\partial u^2}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u^2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u^2}{\partial z}\mathbf{k} = 2u\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + 2u\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + 2u\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= 2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) = 2u\mathbf{grad} u. \end{aligned}$$

10. 问函数 $u=xy^2z$ 在点 $p(1, -1, 2)$ 处沿什么方向的方向导数最大? 并求此方向导数的最大值.

解 $\mathbf{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = y^2 z \mathbf{i} + 2xy z \mathbf{j} + xy^2 \mathbf{k},$

$$\mathbf{grad} u(1, -1, 2) = (y^2 z \mathbf{i} + 2xy z \mathbf{j} + xy^2 \mathbf{k}) \Big|_{(1, -1, 2)} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

$\mathbf{grad} u(1, -1, 2)$ 为方向导数最大的方向, 最大方向导数为

$$|\mathbf{grad} u(1, -1, 2)| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}.$$

习题 8-8

1. 求函数 $f(x, y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的极值.

解 解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 4 - 2x = 0 \\ f_y(x, y) = -4 - 2y = 0 \end{cases}$, 求得驻点为 $(2, -2)$, 由于

$A = f_{xx}(2, -2) = -2 < 0$, $B = f_{xy}(2, -2) = 0$, $C = f_{yy}(2, -2) = -2$, $AC - B^2 > 0$,
所以在点 $(2, -2)$ 处, 函数取得极大值, 极大值为

$$f(2, -2) = 8.$$

2. 求函数 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值.

解 解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = (6 - 2x)(4y - y^2) = 0 \\ f_y(x, y) = (6x - x^2)(4 - 2y) = 0 \end{cases}$,

$$\text{得 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}.$$

因此驻点为 $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 2)$, $(6, 0)$, $(6, 4)$.

函数的二阶偏导数为

$$f_{xx}(x, y) = -2(4y - y^2), f_{xy}(x, y) = 4(3 - x)(2 - y), f_{yy}(x, y) = -2(6x - x^2).$$

在点 $(0, 0)$ 处, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 24$, $f_{yy} = 0$, $AC - B^2 = -24^2 < 0$, 所以 $f(0, 0)$ 不是极值;

在点 $(0, 4)$ 处, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = -24$, $f_{yy} = 0$, $AC - B^2 = -24^2 < 0$, 所以 $f(0, 4)$ 不是极值;

在点 $(3, 2)$ 处, $f_{xx} = -8$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = -18$, $AC - B^2 = 8 \times 18 > 0$, 又 $A < 0$, 所以 $f(3, 2) = 36$ 是函数的极大值;

在点 $(6, 0)$ 处, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = -24$, $f_{yy} = 0$, $AC - B^2 = -24^2 > 0$, 所以 $f(6, 0)$ 不是极值;

在点 $(6, 4)$ 处, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 24$, $f_{yy} = 0$, $AC - B^2 = -24^2 > 0$, 所以 $f(6, 4)$ 不是极值.

综上所述, 函数只有一个极值, 这个极值是极大值 $f(3, 2) = 36$.

3. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.

解 解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0 \\ f_y(x, y) = e^{2x}(2y + 2) = 0 \end{cases}$, 得驻点 $(\frac{1}{2}, -1)$.

$$A = f_{xx}(x, y) = 4e^{2x}(x + y^2 + 2y + 1), B = f_{xy}(x, y) = 4e^{2x}(y + 1), C = f_{yy}(x, y) = 2e^{2x}.$$

因为在点 $(\frac{1}{2}, -1)$ 处, $A = 2e > 0$, $B = 0$, $C = 2e$, $AC - B^2 = 4e^2 > 0$,

所以函数在点 $(\frac{1}{2}, -1)$ 处取得极小值, 极小值为 $f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{e}{2}$.

4. 求函数 $z = xy$ 在适合附加条件 $x + y = 1$ 下的极大值.

解 条件 $x+y=1$ 可表示为 $y=1-x$, 代入 $z=xy$, 于是问题化为 $z=x(1-x)$ 的无条件极值问题.

$$\frac{dz}{dx}=1-2x, \quad \frac{d^2z}{dx^2}=-2.$$

令 $\frac{dz}{dx}=0$, 得驻点 $x=\frac{1}{2}$. 因为 $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0$, 所以 $x=\frac{1}{2}$ 为极大值点, 极大值

$$\text{为 } z=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

5. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 求有最大周界的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为 x, y , 则周长

$$S=x+y+l(0<x<l, 0<y<l).$$

因此, 本题是在 $x^2+y^2=l^2$ 下的条件极值问题, 作函数

$$F(x, y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} F_x=1+2\lambda x=0 \\ F_y=1+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=l^2 \end{cases}, \text{ 得唯一可能的极值点 } x=y=\frac{l}{\sqrt{2}}.$$

根据问题性质可知这种最大周界的直角三角形一定存在, 所以斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 周界最大的是等腰直角三角形.

6. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸方可使表面积最小.

解 设水池的长为 x , 宽为 y , 高为 z , 则水池的表面积为

$$S=xy+2xz+2yz(x>0, y>0, z>0).$$

本题是在条件 $xyz=k$ 下, 求 S 的最大值.

作函数 $F(x, y, z)=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-k)$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} F_x=y+2z+\lambda yz=0 \\ F_y=x+2z+\lambda xz=0 \\ F_z=2x+2y+\lambda xy=0 \\ xyz=k \end{cases},$$

得唯一可能的极值点 $(\sqrt[3]{2k}, \sqrt[3]{2k}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k})$.

由问题本身可知 S 一定有最小值, 所以表面积最小的水池的长和宽都应为

$\sqrt[3]{2k}$. 高为 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$.

7. 在平面 xOy 上求一点, 使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线距离平方之和为最小.

解 设所求点的坐标为 (x, y) , 则此点到 $x=0$ 的距离为 $|y|$, 到 $y=0$ 的距离为 $|x|$, 到 $x+2y-16=0$ 的距离为 $\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{1+2^2}}$, 而距离平方之和为

$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2}{5}(x+2y-16) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{4}{5}(x+2y-16) = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 3x+y-8=0 \\ 2x+9y-32=0 \end{cases}.$$

得唯一的驻点 $(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$, 根据问题的性质可知, 到三直线的距离平方之和最小的点一定存在, 故 $(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$ 即为所求.

8. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体, 问矩形的边长各为多少时, 才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边为 x , 则另一边为 $(p-x)$, 假设矩形绕 $p-x$ 旋转, 则旋转所成圆柱体的体积为 $V = \pi x^2(p-x)$.

由 $\frac{dV}{dx} = 2\pi x(p-x) - \pi x^2 = \pi x(2p-3x) = 0$, 求得唯一驻点 $x = \frac{2}{3}p$.

由于驻点唯一, 由题意又可知这种圆柱体一定有最大值, 所以当矩形的边长为 $\frac{2p}{3}$ 和 $\frac{p}{3}$ 时, 绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

9. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$, (x, y, z) 是它的各面平行于坐标面的内接长方体在第一卦限内的一个顶点, 则此长方体的长宽高分别为 $2x, 2y, 2z$, 体积为

$$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz.$$

令 $F(x, y, z) = 8xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} F_x = 8yz + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 8xz + 2\lambda y = 0 \\ F_z = 8xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 4yz + \lambda x = 0 \\ 4xz + \lambda y = 0 \\ 4xy + \lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases},$$

得唯一驻点 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$.

由题意可知这种长方体必有最大体积, 所以当长方体的长、宽、高都为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ 时其体积最大.

10. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆, 求原点到这椭圆的最长与最短距离.

解 设椭圆上点的坐标 (x, y, z) , 则原点到椭圆上这一点的距离平方为 $d^2=x^2+y^2+z^2$, 其中 x, y, z 要同时满足 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$.

令 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-1)$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} F_x = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ F_y = 2y - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \\ F_z = 2z + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

得驻点 $x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, $z=2\mp\sqrt{3}$. 它们是可能的两个极值点, 由题意这种距离的最大值和最小值一定存在, 所以距离的最大值和最小值在两点处取得, 因为在驻点处

$$d^2=x^2+y^2+z^2=2(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2})^2+(2\mp\sqrt{3})^2=9\mp5\sqrt{3},$$

所以 $d_1=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ 为最长距离; $d_2=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$ 为最短距离.

总习题八

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x, y)$ 在 (x, y) 可微分是 $f(x, y)$ 在该点连续的_____条件, $f(x, y)$ 在点连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件.

解 充分; 必要.

(2) $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件, $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在的_____条件.

解 必要; 充分.

(3) $z=f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x, y) 存在且连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件.

解 充分.

(4) 函数 $z=f(x, y)$ 的两个二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的_____条件.

解 充分.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f_x(0, 0)=3, f_y(0, 0)=-1$, 则有_____.

(A) $dz|_{(0,0)}=3dx-dy$.

(B) 曲面 $z=f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个法向量为 $(3, -1, 1)$.

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x, y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(1, 0, 3)$.

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x, y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(3, 0, 1)$.

解 (C).

3. 求函数 $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域, 并求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x, y)$.

解 函数的定义域为 $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1, y^2 \leq 4x\}$

因为 $(\frac{1}{2}, 0) \in D$, 故由初等函数在定义域内的连续性有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)} = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)} \bigg|_{(\frac{1}{2}, 0)} = \frac{\sqrt{2}}{\ln \frac{3}{4}}.$$

4. 证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

解 因为 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^2} = 0,$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2},$$

所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

5. 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$, 求 $f_x(x,y), f_y(x,y)$.

解 当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2} \right) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2 \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

因此 $f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases},$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1) $z = \ln(x + y^2)$;

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2(x + y^2) - 4y^2}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x + y^2} \right) = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}$$

(2) $z = x^y$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x).$$

7. 求函数 $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.001, \Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z = \frac{(2.01) \times (1.03)}{(2.01)^2 - (1.03)^2} - \frac{2}{3} = 0.02.$

因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(y^3 + x^2 y)}{(x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3 + xy^2}{(x^2 - y^2)^2},$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} = -\frac{5}{9}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} = \frac{10}{9},$$

所以 $dz\Big|_{\substack{x=2, \Delta x=0.01 \\ y=1, \Delta y=0.03}} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,1)}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,1)}\Delta y = 0.03$.

8. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 证明 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续且偏导数存在,

但不可微分.

证明 因为 $0 \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$, 且 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$,

所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 即 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续.

因为 $f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$,

$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$,

所以 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的偏导数存在.

因为 $\Delta z - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y] = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$,

$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \Delta x = \Delta y}} \frac{\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^{3/2}} = \frac{1}{4} \neq 0$,

所以 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微分.

9. 设 $u = x^y$, 而 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 都是可微函数, 求 $\frac{du}{dt}$.

解 $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = yx^{y-1}\varphi'(t) + x^y \ln x \cdot \psi'(t)$.

10. 设 $z = f(u, v, w)$ 具有连续偏导数, 而 $u = \eta - \xi$, $v = \zeta - \xi$, $w = x - \eta$, 求 $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial \eta}$, $\frac{\partial z}{\partial \zeta}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w}$,

$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial w}$,

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

11. 设 $z=f(u, x, y)$, $u=xe^y$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f'_x = e^y f'_u + f'_x,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^y f'_u + f'_x) = e^y f'_u + e^y \cdot \frac{\partial}{\partial y} (f'_u) + \frac{\partial}{\partial y} (f'_x)$$

$$= e^y f'_u + e^y (f''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f''_{uy}) + (f''_{xu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f''_{xy})$$

$$= e^y f'_u + e^y (xe^y f''_{uu} + f''_{uy}) + (xe^y f''_{xu} + f''_{xy})$$

$$= e^y f'_u + xe^{2y} f''_{uu} + e^y f''_{uy} + xe^y f''_{xu} + f''_{xy}.$$

12. 设 $x=e^u \cos v$, $y=e^u \sin v$, $z=uv$, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x},$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}.$$

而由 $x=e^u \cos v$, $y=e^u \sin v$ 得

$$\begin{cases} dx = e^u \cos v du - e^u \sin v dv \\ dy = e^u \sin v du + e^u \cos v dv \end{cases}$$

解得 $du = e^{-u} \cos v dx + e^{-u} \sin v dy$, $dv = -e^{-u} \sin v dx + e^{-u} \cos v dy$,

从而 $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos v$.

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v e^{-u} \cos v + u (-e^{-u} \sin v) = e^{-u} (v \cos v - u \sin v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = v e^{-u} \sin v + u e^{-u} \cos v = e^{-u} (v \sin v + u \cos v).$$

另解 由 $x=e^u \cos v$, $y=e^u \sin v$ 得

$$\begin{cases} dx = e^u \cos v du - e^u \sin v dv \\ dy = e^u \sin v du + e^u \cos v dv \end{cases}$$

解得 $du = e^{-u} \cos v dx + e^{-u} \sin v dy$, $dv = -e^{-u} \sin v dx + e^{-u} \cos v dy$.

又由 $z=uv$ 得

$$\begin{aligned} dz &= v du + u dv \\ &= v(e^{-u} \cos v dx + e^{-u} \sin v dy) + u(-e^{-u} \sin v dx + e^{-u} \cos v dy) \\ &= e^{-u}(v \cos v - u \sin v) dx + e^{-u}(v \sin v + u \cos v) dy, \end{aligned}$$

从而 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-u}(v \cos v - u \sin v)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-u}(v \sin v + u \cos v)$.

13. 求螺旋线 $x=a \cos \theta$, $y=a \sin \theta$, $z=b \theta$ 在点 $(a, 0, 0)$ 处的切线及法平面方程.

解 点 $(a, 0, 0)$ 对应的参数为 $\theta=0$, 所以点 $(a, 0, 0)$ 处的切向量为

$$\mathbf{T} = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}, \frac{dz}{d\theta} \right) \Big|_{\theta=0} = (-a \sin \theta, a \cos \theta, b) \Big|_{\theta=0} = (0, a, b),$$

所求的切线方程为

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b},$$

法平面方程为

$$a(y-0)+b(z-0)=0, \text{ 即 } ay+bz=0.$$

14. 在曲面 $z=xy$ 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 并写出这法线的方程.

解 已知平面的法线向量为 $\mathbf{n}_0=(1, 3, 1)$.

设所求的点为 (x_0, y_0, z_0) , 则曲面在该点的法向量为 $\mathbf{n}=(y_0, x_0, -1)$. 由题意知

$$\mathbf{n} // \mathbf{n}_0, \text{ 即 } \frac{y_0}{1} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1},$$

于是 $x_0=-3$, $y_0=-1$, $z_0=x_0 y_0=3$,

即所求点为 $(-3, -1, 3)$, 法线方程为

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

15. 设 $\mathbf{e}_l=(\cos \theta, \sin \theta)$, 求函数 $f(x, y)=x^2-xy-y^2$ 在点 $(1, 1)$ 沿方向 l 的方向导数, 并分别确定角 θ , 使这导数有(1)最大值, (2)最小值, (3)等于 0.

解 由题意知 l 方向的单位向量为 $(\cos\alpha, \cos\beta)=(\cos\theta, \sin\theta)$, 即方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\theta, \cos\beta=\sin\theta$.

因为

$$f_x(1, 1)=(2x-y)|_{(1, 1)}=1,$$

$$f_y(1, 1)=(-x+2y)|_{(1, 1)}=1,$$

所以在点 $(1, 1)$ 沿方向 l 的方向导数为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1,1)} = f_x(1, 1)\cos\alpha + f_y(1, 1)\cos\beta = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}).$$

因此

(1) 当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时, 方向导数最大, 其最大值为 $\sqrt{2}$;

(2) 当 $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ 时, 方向导数最小, 其最小值为 $-\sqrt{2}$;

(3) 当 $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ 及 $\frac{7\pi}{4}$ 时, 方向导数为 0.

16. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处有外法向量为 $\mathbf{n} = (\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2})$, 其单位向量为

$$\mathbf{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} (\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}).$$

因为

$$u_x(x_0, y_0, z_0) = 2x_0, u_y(x_0, y_0, z_0) = 2y_0, u_z(x_0, y_0, z_0) = 2z_0,$$

所以, 所求方向导数为

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} &= u_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + u_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + u_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} (2x_0 \cdot \frac{x_0}{a^2} + 2y_0 \cdot \frac{y_0}{b^2} + 2z_0 \cdot \frac{z_0}{c^2}) = \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \end{aligned}$$

17. 求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 设 $M(x, y, z)$ 为平面和柱面的交线上的一点, 则 M 到 xOy 平面的距离为 $d(x, y, z) = |z|$.

问题在于求函数 $f(x, y, z) = |z|^2 = z^2$ 在约束条件 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最不值.

作辅助函数:

$$F(x, y, z) = z^2 + \lambda\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1\right) + \mu(x^2 + y^2 - 1).$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \frac{\lambda}{5} = 0 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

解方程组得

$$x = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{3}{5}, \quad z = \frac{35}{12}.$$

因为可能的极值点只有 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{35}{12})$ 这一个, 所以这个点就是所求之点.

18. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小, 求这切平面的切点, 并求此最小体积.

解 令 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, 则

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y = \frac{2y}{b^2}, \quad F_z = \frac{2z}{c^2}.$$

椭球面上点 $M(x, y, z)$ 处的切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) + \frac{z}{c^2}(Z-z) = 0, \quad \text{即} \quad \frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

切平面在三个坐标轴上的截距分别为

$$X_0 = \frac{a^2}{x}, \quad Y_0 = \frac{b^2}{y}, \quad Z_0 = \frac{c^2}{z}.$$

切平面与三个坐标面所围的四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{xyz}.$$

现将问题化为求函数 $V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{xyz}$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 下的最小值的问题, 或求

函数 $f(x, y, z) = xyz$ 在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 下的最大值的问题.

作辅助函数 $F(x, y, z) = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right).$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases},$$

解方程组得

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是, 所求切点为 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$, 此时最小体积为 $V = \frac{\sqrt{3}}{2} abc$.

习题 9-1

1. 设有一平面薄板(不计其厚度), 占有 xOy 面上的闭区域 D , 薄板上分布有密度为 $\mu = \mu(x, y)$ 的电荷, 且 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续, 试用二重积分表达该板上全部电荷 Q .

解 板上的全部电荷应等于电荷的面密度 $\mu(x, y)$ 在该板所占闭区域 D 上的二重积分

$$Q = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

2. 设 $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_1 = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$;

又 $I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 的关系.

解 I_1 表示由曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 与平面 $x = \pm 1, y = \pm 2$ 以及 $z = 0$ 围成的立体 V 的体积.

I_2 表示由曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 与平面 $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$ 以及 $z = 0$ 围成的立体 V_1 的体积.

显然立体 V 关于 yOz 面、 xOz 面对称, 因此 V_1 是 V 位于第一卦限中的部分, 故

$$V = 4V_1, \text{ 即 } I_1 = 4I_2.$$

3. 利用二重积分的定义证明:

(1) $\iint_D d\sigma = \sigma$ (其中 σ 为 D 的面积);

证明 由二重积分的定义可知,

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域的面积.

此处 $f(x, y) = 1$, 因而 $f(\xi, \eta) = 1$, 所以

$$\iint_D d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \sigma.$$

(2) $\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma$ (其中 k 为常数);

$$\begin{aligned}\text{证明 } \iint_D kf(x, y)d\sigma &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \\ &= k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = k \iint_D f(x, y)d\sigma.\end{aligned}$$

$$(3) \iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma,$$

其中 $D=D_1 \cup D_2$, D_1 、 D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证明 将 D_1 和 D_2 分别任意分为 n_1 和 n_2 个小闭区域 $\Delta\sigma_{i_1}$ 和 $\Delta\sigma_{i_2}$,

$n_1+n_2=n$, 作和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i_1=1}^{n_1} f(\xi_{i_1}, \eta_{i_1})\Delta\sigma_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{n_2} f(\xi_{i_2}, \eta_{i_2})\Delta\sigma_{i_2}.$$

令各 $\Delta\sigma_{i_1}$ 和 $\Delta\sigma_{i_2}$ 的直径中最大值分别为 λ_1 和 λ_2 , 又 $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$, 则有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{i_1=1}^{n_1} f(\xi_{i_1}, \eta_{i_1})\Delta\sigma_{i_1} + \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i_2=1}^{n_2} f(\xi_{i_2}, \eta_{i_2})\Delta\sigma_{i_2},$$

$$\text{即 } \iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma.$$

4. 根据二重积分的性质, 比较下列积分大小:

$$(1) \iint_D (x+y)^2 d\sigma \text{ 与 } \iint_D (x+y)^3 d\sigma \text{ 其中积分区域 } D \text{ 是由 } x \text{ 轴, } y \text{ 轴与直线}$$

$x+y=1$ 所围成;

解 区域 D 为: $D=\{(x, y)|0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\}$, 因此当 $(x, y) \in D$ 时, 有 $(x+y)^3 \leq (x+y)^2$, 从而

$$\iint_D (x+y)^3 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^2 d\sigma.$$

$$(2) \iint_D (x+y)^2 d\sigma \text{ 与 } \iint_D (x+y)^3 d\sigma \text{ 其中积分区域 } D \text{ 是由圆周 } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

所围成;

解 区域 D 如图所示, 由于 D 位于直线 $x+y=1$ 的上方, 所以当 $(x, y) \in D$ 时, $x+y \geq 1$,

从而 $(x+y)^3 \geq (x+y)^2$, 因而

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 d\sigma.$$

(3) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 其中 D 是三角形闭区域, 三角顶点分别为 $(1, 0)$,

$(1, 1)$, $(2, 0)$;

解 区域 D 如图所示, 显然当 $(x, y) \in D$ 时, $1 \leq x+y \leq 2$, 从而 $0 \leq \ln(x+y) \leq 1$, 故有

$$[\ln(x+y)]^2 \leq \ln(x+y),$$

因而 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \geq \iint_D \ln(x+y) d\sigma.$

(4) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 其中 $D = \{(x, y) | 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}.$

解 区域 D 如图所示, 显然 D 位于直线 $x+y=e$ 的上方, 故当 $(x, y) \in D$ 时, $x+y \geq e$, 从而

$$\ln(x+y) \geq 1,$$

因而 $[\ln(x+y)]^2 \geq \ln(x+y),$

故 $\iint_D \ln(x+y) d\sigma \leq \iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma.$

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I = \iint_D xy(x+y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$

解 因为在区域 D 上 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 所以

$$0 \leq xy \leq 1, 0 \leq x+y \leq 2,$$

进一步可得

$$0 \leq xy(x+y) \leq 2,$$

于是 $\iint_D 0 d\sigma \leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq \iint_D 2 d\sigma,$

即 $0 \leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq 2.$

(2) $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\};$

解 因为 $0 \leq \sin^2 x \leq 1, 0 \leq \sin^2 y \leq 1$, 所以 $0 \leq \sin^2 x \sin^2 y \leq 1$. 于是可得

$$\iint_D 0 d\sigma \leq \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \leq \iint_D 1 d\sigma,$$

即
$$0 \leq \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \leq \pi^2.$$

(3) $I = \iint_D (x+y+1) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$;

解 因为在区域 D 上, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$, 所以 $1 \leq x+y+1 \leq 4$, 于是可得

$$\iint_D d\sigma \leq \iint_D (x+y+1) d\sigma \leq \iint_D 4 d\sigma,$$

即
$$2 \leq \iint_D (x+y+1) d\sigma \leq 8.$$

(4) $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

解 在 D 上, 因为 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 所以

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 \leq 4(x^2 + y^2) + 9 \leq 25.$$

于是
$$\iint_D 9 d\sigma \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq \iint_D 25 d\sigma,$$

$$9\pi \cdot 2^2 \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 25 \cdot \pi \cdot 2^2,$$

即
$$36\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 100\pi.$$

习题 9-2

1. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\};$$

解 积分区域可表示为 $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy = \int_{-1}^1 [x^2 y + \frac{1}{3} y^3]_{-1}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^2 + \frac{1}{3}) dx = [\frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} x]_{-1}^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D (3x + 2y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由两坐标轴及直线 } x+y=2 \text{ 所围成的闭区域};$$

解 积分区域可表示为 $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (3x + 2y) d\sigma &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (3x + 2y) dy = \int_0^2 [3xy + y^2]_0^{2-x} dx \\ &= \int_0^2 (4 + 2x - 2x^2) dx = [4x + x^2 - \frac{2}{3} x^3]_0^2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

$$(3) \iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$\text{解 } \iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^3) d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^1 (x^3 + 3x^2 y + y^3) dx = \int_0^1 [\frac{x^4}{4} + x^3 y + y^3 x]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{4} + y + y^3) dy = [\frac{y}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

$$(4) \iint_D x \cos(x+y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是顶点分别为 } (0, 0), (\pi, 0), \text{ 和 } (\pi, \pi) \text{ 的三角形闭区}$$

域.

解 积分区域可表示为 $D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_D x \cos(x+y) d\sigma &= \int_0^\pi x dx \int_0^x \cos(x+y) dy = \int_0^\pi x [\sin(x+y)]_0^x dx \\ &= \int_0^\pi x (\sin 2x - \sin x) dx = -\int_0^\pi x d(\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x) \\ &= -x(\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi (\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x) dx = -\frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)| 0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq \sqrt{x}\}$. 于是

$$\iint_D x\sqrt{y}d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy = \int_0^1 x[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{3}x^4)dx = \frac{6}{55}.$$

(2) $\iint_D xy^2d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)| -2\leq y\leq 2, 0\leq x\leq \sqrt{4-y^2}\}$. 于是

$$\begin{aligned}\iint_D xy^2d\sigma &= \int_{-2}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^2dx = \int_{-2}^2 [\frac{1}{2}x^2y^2]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_{-2}^2 (2y^2 - \frac{1}{2}y^4)dy = [\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{10}y^5]_{-2}^2 = \frac{64}{15}.\end{aligned}$$

(3) $\iint_D e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)| |x|+|y|\leq 1\}$;

解 积分区域图如, 并且

$$D=\{(x, y)| -1\leq x\leq 0, -x-1\leq y\leq x+1\} \cup \{(x, y)| 0\leq x\leq 1, x-1\leq y\leq -x+1\}.$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y}d\sigma &= \int_{-1}^0 e^x dx \int_{-x-1}^{x+1} e^y dy + \int_0^1 e^x dx \int_{x-1}^{-x+1} e^y dy \\ &= \int_{-1}^0 e^x [e^y]_{-x-1}^{x+1} dx + \int_0^1 e^x [e^y]_{x-1}^{-x+1} dy = \int_{-1}^0 (e^{2x+1} - e^{-1})dx + \int_0^1 (e - e^{2x-1})dx \\ &= [\frac{1}{2}e^{2x+1} - e^{-1}x]_{-1}^0 + [ex - \frac{1}{2}e^{2x-1}]_0^1 = e - e^{-1}.\end{aligned}$$

(4) $\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 轴所围成的闭区域.

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)| 0\leq y\leq 2, \frac{1}{2}y\leq x\leq y\}$. 于是

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2+y^2-x)dx = \int_0^2 [\frac{1}{3}x^3 + y^2x - \frac{1}{2}x^2]_{\frac{y}{2}}^y dy \\ &= \int_0^2 (\frac{19}{24}y^3 - \frac{3}{8}y^2)dy = \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

3. 如果二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 的被积函数 $f(x, y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积,

即 $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, 积分区域 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \left[\int_c^d f_2(y) dy \right]$$

证明 $\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy = \int_a^b \left[\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy \right] dx,$

而 $\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy = f_1(x) \int_c^d f_2(y) dy,$

故 $\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b \left[f_1(x) \int_c^d f_2(y) dy \right] dx.$

由于 $\int_c^d f_2(y) dy$ 的值是一常数, 因而可提到积分号的外面, 于是得

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \left[\int_c^d f_2(y) dy \right]$$

4. 化二重积分 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$ 为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域 D 是:

(1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

解积分区域如图所示, 并且

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, x \leq y \leq 2\sqrt{x}\}, \text{ 或 } D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{4}y^2 \leq x \leq y\},$$

所以 $I = \int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy$ 或 $I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^y f(x, y) dx.$

(2) 由 x 轴及半圆周 $x^2 + y^2 = r^2 (y \geq 0)$ 所围成的闭区域;

解积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)| -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}\},$$

$$\text{或 } D=\{(x, y)| 0 \leq y \leq r, -\sqrt{r^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2-y^2}\},$$

$$\text{所以 } I = \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y) dy, \text{ 或 } I = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

(3)由直线 $y=x$, $x=2$ 及双曲线 $y=\frac{1}{x}$ ($x>0$)所围成的闭区域;

解积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)| 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\},$$

$$\text{或 } D=\{(x, y)| \frac{1}{2} \leq y \leq 1, -\frac{1}{y} \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y)| 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2\},$$

$$\text{所以 } I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy, \text{ 或 } I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{-\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

(4)环形闭区域 $\{(x, y)| 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

解 如图所示, 用直线 $x=-1$ 和 $x=1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4 . 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_4} f(x, y) d\sigma \\ &= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \\ &\quad + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \end{aligned}$$

用直线 $y=1$, 和 $y=-1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4 ,

如图所示. 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_4} f(x, y) d\sigma \\
 &= \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \\
 &\quad + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx
 \end{aligned}$$

5. 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y=x, y=a$ 及 $x=b(b>a)$ 围成的闭区域,

证明: $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$.

证明 积分区域如图所示, 并且积分区域可表示为

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}, \text{ 或 } D = \{(x, y) | a \leq y \leq b, y \leq x \leq b\}.$$

于是 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy$, 或 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$.

因此 $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$.

6. 改换下列二次积分的积分次序:

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$, 所以

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

$$(2) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2y\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq x\leq 4, \frac{x}{2}\leq y\leq \sqrt{x}\}$, 所以

$$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq \sqrt{1-y^2}\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|-1\leq x\leq 1, 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\}$, 所以

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(4) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|1\leq x\leq 2, 2-x\leq y\leq \sqrt{2x-x^2}\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, 2-y\leq x\leq 1+\sqrt{1-y^2}\}$, 所以

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(5) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|1\leq x\leq e, 0\leq y\leq \ln x\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, e^y\leq x\leq e\}$, 所以

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$$

$$(6) \int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy \text{ (其中 } a\geq 0\text{)}.$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\leq x\leq \pi, -\sin \frac{x}{2}\leq y\leq \sin x\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为

$$D=\{(x, y)|-1\leq y\leq 0, -2\arcsin y\leq x\leq \pi\}$$

$$\cup \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y\},$$

所以
$$\int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^\pi f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y)=x^2+y^2$, 求该薄片的质量.

解 如图, 该薄片的质量为

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3} y^3 \right] dy = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

8. 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 四个平面所围成的立体如图, 所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (6-2x-3y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-2x-3y) dy \\ &= \int_0^1 \left[6y - 2xy - \frac{3}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x \right) dx = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

9. 求由平面 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 立体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$, 所求立体的体积为以曲面 $z=6-x^2-y^2$ 为顶, 以区域 D 为底的曲顶柱体的体积, 即

$$V = \iint_D (6-x^2-y^2) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2) dy = \frac{17}{6}.$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z , 得 $x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$, 即 $x^2+y^2=2$, 故立体在 xOy 面上

的投影区域为 $x^2+y^2 \leq 2$, 因为积分区域关于 x 及 y 轴均对称, 并且被积函数关于 x, y 都是偶函数, 所以

$$V = \iint_D [(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)] d\sigma = \iint_D (6-3x^2-3y^2) d\sigma$$

$$=12\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2-x^2-y^2)dy = 8\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{(2-x^2)^3} dx = 6\pi.$$

11. 画出积分区域, 把积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 表示为极坐标形式的二次积分, 其中

积分区域 D 是:

(1) $\{(x,y) | x^2+y^2 \leq a^2\} (a>0);$

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a\}$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

(2) $\{(x,y) | x^2+y^2 \leq 2x\};$

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2\cos \theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

(3) $\{(x,y) | a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$, 其中 $0 < a < b$;

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, a \leq \rho \leq b\}$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

(4) $\{(x,y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}.$

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}\}$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy;$

解 积分区域 D 如图所示. 因为

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sec \theta\} \cup \{(\rho, \theta) | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \csc \theta\},$$

所以
$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy &= \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \rho \leq 2 \sec \theta\},$$

所示
$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy &= \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma = \iint_D f(\rho) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2 \sec \theta} f(\rho) \rho d\rho. \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq \rho \leq 1\},$$

所以
$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy &= \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \sec \theta \tan \theta \leq \rho \leq \sec \theta\},$$

所以
$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec\theta \tan\theta}^{\sec\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$$

13. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2a \cos\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy &= \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq a \sec\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy &= \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a \sec\theta} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{a^3}{6} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)]. \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sec\theta \tan\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy &= \iint_D \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta \tan\theta} \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta \tan\theta d\theta = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx.$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq a\}$, 所以

$$\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx = \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{8} a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\rho\leq 2\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma &= \iint_D e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (e^4 - 1) = \pi(e^4 - 1).\end{aligned}$$

(2) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq\rho\leq 1\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma &= \iint_D \ln(1+\rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} (2\ln 2 - 1) = \frac{1}{4} (2\ln 2 - 1).\end{aligned}$$

(3) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$, $y=x$ 所围成的第一象限内的闭区域.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq \frac{\pi}{4}, 1\leq\rho\leq 2\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma &= \iint_D \arctan(\tan\theta) \cdot \rho d\rho d\theta = \iint_D \theta \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \theta \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{3\pi^3}{64}.\end{aligned}$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

解 因为积分区域可表示为 $D=\{(x,y)|1\leq x\leq 2, \frac{1}{x}\leq y\leq x\}$, 所以

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2} dy = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限

内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq \rho\leq 1\}$, 所以

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma = \iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

(3) $\iint_D (x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域;

解 因为积分区域可表示为 $D=\{(x,y)|a\leq y\leq 3a, y-a\leq x\leq y\}$, 所以

$$\iint_D (x^2+y^2) d\sigma = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2+y^2) dx = \int_a^{3a} (2ay^2 - a^2y + \frac{1}{3}a^3) dy = 14a^4.$$

(4) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y)|a^2\leq x^2+y^2\leq b^2\}$.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq 2\pi, a\leq \rho\leq b\}$, 所以

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^2 dr = \frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 ($0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}$) 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量.

解 区域如图所示. 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq \rho\leq 2\theta\}$, 所以所求质量

$$M = \iint_D \mu(x,y) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4 d\theta = \frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面 $y=0, y=kx(k>0), z=0$ 以及球心在 origin、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 此立体在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)|0\leq \theta\leq \arctan k, 0\leq \rho\leq R\}$.

$$V = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\arctan k} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{1}{3} R^3 \arctan k .$$

18. 计算以 xOy 平面上圆域 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 曲顶柱体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\leq ax\}$.

在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\rho\leq a\cos\theta\}$, 所以

$$V = \iint_{x^2+y^2\leq ax} (x^2+y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{a^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{32} a^4 \pi .$$

习题 9-2

1. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\};$$

解 积分区域可表示为 $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy = \int_{-1}^1 [x^2 y + \frac{1}{3} y^3]_{-1}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^2 + \frac{1}{3}) dx = [\frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} x]_{-1}^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D (3x + 2y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由两坐标轴及直线 } x + y = 2 \text{ 所围成的闭区域};$$

解 积分区域可表示为 $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (3x + 2y) d\sigma &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (3x + 2y) dy = \int_0^2 [3xy + y^2]_0^{2-x} dx \\ &= \int_0^2 (4 + 2x - 2x^2) dx = [4x + x^2 - \frac{2}{3} x^3]_0^2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

$$(3) \iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$\text{解 } \iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^3) d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^1 (x^3 + 3x^2 y + y^3) dx = \int_0^1 [\frac{x^4}{4} + x^3 y + y^3 x]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{4} + y + y^3) dy = [\frac{y}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

$$(4) \iint_D x \cos(x + y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是顶点分别为 } (0, 0), (\pi, 0), \text{ 和 } (\pi, \pi) \text{ 的三角形闭区}$$

域.

解 积分区域可表示为 $D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_D x \cos(x + y) d\sigma &= \int_0^\pi x dx \int_0^x \cos(x + y) dy = \int_0^\pi x [\sin(x + y)]_0^x dx \\ &= \int_0^\pi x (\sin 2x - \sin x) dx = - \int_0^\pi x d(\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x) \\ &= -x(\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi (\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x) dx = -\frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)| 0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq \sqrt{x}\}$. 于是

$$\iint_D x\sqrt{y}d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy = \int_0^1 x \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{3} x^4 \right) dx = \frac{6}{55}.$$

(2) $\iint_D xy^2d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)| -2\leq y\leq 2, 0\leq x\leq \sqrt{4-y^2}\}$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2d\sigma &= \int_{-2}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^2dx = \int_{-2}^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_{-2}^2 (2y^2 - \frac{1}{2} y^4) dy = \left[\frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{10} y^5 \right]_{-2}^2 = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

(3) $\iint_D e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)| |x|+|y|\leq 1\}$;

解 积分区域图如, 并且

$$D=\{(x, y)| -1\leq x\leq 0, -x-1\leq y\leq x+1\} \cup \{(x, y)| 0\leq x\leq 1, x-1\leq y\leq -x+1\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y}d\sigma &= \int_{-1}^0 e^x dx \int_{-x-1}^{x+1} e^y dy + \int_0^1 e^x dx \int_{x-1}^{-x+1} e^y dy \\ &= \int_{-1}^0 e^x [e^y]_{-x-1}^{x+1} dx + \int_0^1 e^x [e^y]_{x-1}^{-x+1} dy = \int_{-1}^0 (e^{2x+1} - e^{-1}) dx + \int_0^1 (e - e^{2x-1}) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} - e^{-1} x \right]_{-1}^0 + \left[ex - \frac{1}{2} e^{2x-1} \right]_0^1 = e - e^{-1}. \end{aligned}$$

(4) $\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 轴所围成的闭区域.

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)| 0\leq y\leq 2, \frac{1}{2}y\leq x\leq y\}$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2+y^2-x) dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x - \frac{1}{2} x^2 \right]_{\frac{y}{2}}^y dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{19}{24} y^3 - \frac{3}{8} y^2 \right) dy = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

3. 如果二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 的被积函数 $f(x, y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积,

即 $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, 积分区域 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \left[\int_c^d f_2(y) dy \right]$$

证明
$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy = \int_a^b \left[\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy \right] dx,$$

而
$$\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy = f_1(x) \int_c^d f_2(y) dy,$$

故
$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b \left[f_1(x) \int_c^d f_2(y) dy \right] dx.$$

由于 $\int_c^d f_2(y) dy$ 的值是一常数, 因而可提到积分号的外面, 于是得

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \left[\int_c^d f_2(y) dy \right]$$

4. 化二重积分 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$ 为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域 D 是:

(1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

解积分区域如图所示, 并且

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, x \leq y \leq 2\sqrt{x}\}, \text{ 或 } D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{4}y^2 \leq x \leq y\},$$

所以
$$I = \int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy \text{ 或 } I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^y f(x, y) dx.$$

(2) 由 x 轴及半圆周 $x^2 + y^2 = r^2 (y \geq 0)$ 所围成的闭区域;

解积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)| -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}\},$$

$$\text{或 } D=\{(x, y)| 0 \leq y \leq r, -\sqrt{r^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2-y^2}\},$$

$$\text{所以 } I = \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y) dy, \text{ 或 } I = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

(3)由直线 $y=x$, $x=2$ 及双曲线 $y=\frac{1}{x}$ ($x>0$)所围成的闭区域;

解积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)| 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\},$$

$$\text{或 } D=\{(x, y)| \frac{1}{2} \leq y \leq 1, -\frac{1}{y} \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y)| 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2\},$$

$$\text{所以 } I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy, \text{ 或 } I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{-\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

(4)环形闭区域 $\{(x, y)| 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

解 如图所示, 用直线 $x=-1$ 和 $x=1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4 . 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_4} f(x, y) d\sigma \\ &= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \\ &\quad + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \end{aligned}$$

用直线 $y=1$, 和 $y=-1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4 ,

如图所示. 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_4} f(x, y) d\sigma \\
 &= \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \\
 &\quad + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx
 \end{aligned}$$

5. 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y=x, y=a$ 及 $x=b(b>a)$ 围成的闭区域,

证明: $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$.

证明 积分区域如图所示, 并且积分区域可表示为

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}, \text{ 或 } D = \{(x, y) | a \leq y \leq b, y \leq x \leq b\}.$$

于是 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy$, 或 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$.

因此 $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$.

6. 改换下列二次积分的积分次序:

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$, 所以

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

$$(2) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2y\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq x\leq 4, \frac{x}{2}\leq y\leq \sqrt{x}\}$, 所以

$$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq \sqrt{1-y^2}\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|-1\leq x\leq 1, 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\}$, 所以

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(4) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|1\leq x\leq 2, 2-x\leq y\leq \sqrt{2x-x^2}\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, 2-y\leq x\leq 1+\sqrt{1-y^2}\}$, 所以

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(5) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|1\leq x\leq e, 0\leq y\leq \ln x\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, e^y\leq x\leq e\}$, 所以

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$$

$$(6) \int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy \text{ (其中 } a\geq 0\text{)}.$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\leq x\leq \pi, -\sin \frac{x}{2}\leq y\leq \sin x\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为

$$D=\{(x, y)|-1\leq y\leq 0, -2\arcsin y\leq x\leq \pi\}$$

$$\cup \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y\},$$

所以
$$\int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^\pi f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y)=x^2+y^2$, 求该薄片的质量.

解 如图, 该薄片的质量为

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3} y^3 \right] dy = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

8. 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 四个平面所围成的立体如图, 所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (6-2x-3y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-2x-3y) dy \\ &= \int_0^1 \left[6y - 2xy - \frac{3}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x \right) dx = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

9. 求由平面 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 立体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$, 所求立体的体积为以曲面 $z=6-x^2-y^2$ 为顶, 以区域 D 为底的曲顶柱体的体积, 即

$$V = \iint_D (6-x^2-y^2) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2) dy = \frac{17}{6}.$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z , 得 $x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$, 即 $x^2+y^2=2$, 故立体在 xOy 面上

的投影区域为 $x^2+y^2 \leq 2$, 因为积分区域关于 x 及 y 轴均对称, 并且被积函数关于 x, y 都是偶函数, 所以

$$V = \iint_D [(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)] d\sigma = \iint_D (6-3x^2-3y^2) d\sigma$$

$$= 12 \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2-x^2-y^2) dy = 8 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{(2-x^2)^3} dx = 6\pi.$$

11. 画出积分区域, 把积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表示为极坐标形式的二次积分, 其中

积分区域 D 是:

(1) $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\} (a > 0);$

解 积分区域 D 如图. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a\}$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

(2) $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\};$

解 积分区域 D 如图. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

(3) $\{(x, y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, 其中 $0 < a < b$;

解 积分区域 D 如图. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, a \leq \rho \leq b\}$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

(4) $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}.$

解 积分区域 D 如图. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}\}$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy;$

解 积分区域 D 如图所示. 因为

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sec \theta\} \cup \{(\rho, \theta) | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \csc \theta\},$$

所以
$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy &= \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \rho \leq 2 \sec \theta\},$$

所示
$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy &= \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma = \iint_D f(\rho) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2 \sec \theta} f(\rho) \rho d\rho. \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq \rho \leq 1\},$$

所以
$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy &= \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \sec \theta \tan \theta \leq \rho \leq \sec \theta\},$$

所以
$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec\theta \tan\theta}^{\sec\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$$

13. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2a \cos\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy &= \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq a \sec\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy &= \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a \sec\theta} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{a^3}{6} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)]. \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sec\theta \tan\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy &= \iint_D \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta \tan\theta} \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta \tan\theta d\theta = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx.$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq a\}$, 所以

$$\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx = \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{8} a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\rho\leq 2\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma &= \iint_D e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (e^4 - 1) = \pi(e^4 - 1).\end{aligned}$$

(2) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq\rho\leq 1\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma &= \iint_D \ln(1+\rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} (2\ln 2 - 1) = \frac{1}{4} (2\ln 2 - 1).\end{aligned}$$

(3) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$, $y=x$ 所围成的第一象限内的闭区域.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq \frac{\pi}{4}, 1\leq\rho\leq 2\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma &= \iint_D \arctan(\tan \theta) \cdot \rho d\rho d\theta = \iint_D \theta \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \theta \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{3\pi^3}{64}.\end{aligned}$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

解 因为积分区域可表示为 $D=\{(x,y)|1\leq x\leq 2, \frac{1}{x}\leq y\leq x\}$, 所以

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2} dy = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限

内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq \rho\leq 1\}$, 所以

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma = \iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

(3) $\iint_D (x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域;

解 因为积分区域可表示为 $D=\{(x,y)|a\leq y\leq 3a, y-a\leq x\leq y\}$, 所以

$$\iint_D (x^2+y^2) d\sigma = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2+y^2) dx = \int_a^{3a} (2ay^2 - a^2y + \frac{1}{3}a^3) dy = 14a^4.$$

(4) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y)|a^2\leq x^2+y^2\leq b^2\}$.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq 2\pi, a\leq \rho\leq b\}$, 所以

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^2 dr = \frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 ($0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}$) 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量.

解 区域如图所示. 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq \rho\leq 2\theta\}$, 所以所求质量

$$M = \iint_D \mu(x,y) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4 d\theta = \frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面 $y=0, y=kx(k>0), z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 此立体在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)|0\leq \theta\leq \arctan k, 0\leq \rho\leq R\}$.

$$V = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\arctan k} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{1}{3} R^3 \arctan k .$$

18. 计算以 xOy 平面上圆域 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 曲顶柱体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\leq ax\}$.

在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\rho\leq a\cos\theta\}$, 所以

$$V = \iint_{x^2+y^2\leq ax} (x^2+y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{a^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{32} a^4 \pi .$$

1. 化三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是:

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0, z=0$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz.$$

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$$

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2-x^2, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$$

提示: 曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2-x^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2+y^2=1$.

(4) 由曲面 $cz=xy(c>0)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \frac{xy}{c}, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq a\},$$

于是
$$I = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^{\frac{xy}{c}} f(x, y, z) dz.$$

提示: 区域 Ω 的上边界曲面为曲面 $cz=xy$, 下边界曲面为平面 $z=0$.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z) = x+y+z$, 计算该物体的质量.

解
$$M = \iiint_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y+\frac{1}{2}) dy$$

$$= \int_0^1 [xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y]_0^1 dx = \int_0^1 (x+1) dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 的被积函数 $f(x, y, z)$ 是三个函数 $f_1(x)$ 、

$f_2(y)$ 、 $f_3(z)$ 的乘积, 即 $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, 积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$, 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积, 即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

证明
$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_l^m f_1(x) f_2(y) f_3(z) dz \right) dy \right] dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \left[\int_c^d (f_1(x) f_2(y) \int_l^m f_3(z) dz) dy \right] dx = \int_a^b \left[(f_1(x) \int_l^m f_3(z) dz) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) f_1(x) \right] dx = \left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \int_a^b f_1(x) dx \\ &= \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz. \end{aligned}$$

4. 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z=xy$, 与平面 $y=x$, $x=1$ 和 $z=0$ 所围

成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^{xy} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^5 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}.$$

5. 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的四

面体.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).
 \end{aligned}$$

提示:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy \\
 &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2(1+x+y)} - \frac{1}{8}y \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).
 \end{aligned}$$

6. 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dy = \int_0^1 \frac{1}{8} x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}.
 \end{aligned}$$

7. 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0$, $z=y$, $y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq y, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$\iiint_{\Omega} xz dx dy dz = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y z dz = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 \frac{1}{2} y^2 dy$$
$$= \frac{1}{6} \int_{-1}^1 x(1-x^6) dx = 0.$$

8. 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h (R > 0, h > 0)$ 所

围成的闭区域.

解 当 $0 \leq z \leq h$ 时, 过 $(0, 0, z)$ 作平行于 xOy 面的平面, 截得立体 Ω 的截面为圆 D_z : $x^2 + y^2 = (\frac{R}{h}z)^2$, 故 D_z 的半径为 $\frac{R}{h}z$, 面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$, 于是

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2},$$

于是
$$\iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) d\rho$$
$$= \pi \int_0^1 (2\rho - \rho^3 - \rho^5) d\rho = \frac{7}{12} \pi.$$

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2 dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^5) d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} d\theta = \frac{16}{3} \pi.$$

10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq 1,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \iiint_{\Omega} r^4 \cdot \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4}{5} \pi.$$

(2) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{1}{4} (2a \cos \varphi)^4 d\varphi$$

$$= 8\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{7}{6} \pi a^4.$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中 Ω 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第一

卦限内的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} xy dv = \iiint_{\Omega} \rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho d\theta dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^1 dz = \frac{1}{8}.$$

别解: 用直角坐标计算

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} xy dv &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^1 dz = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

(2) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \varphi,$$

于是
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \frac{1}{4} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{10}.\end{aligned}$$

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{5}{2} \rho \leq z \leq 5,$$

于是
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz \\ &= 2\pi \int_0^2 \rho^3 \left(5 - \frac{5}{2}\rho\right) d\rho = 8\pi.\end{aligned}$$

(4) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $0 < a \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq A$, $z \geq 0$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq A,$$

于是
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv &= \iiint_{\Omega} (r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr = \frac{4\pi}{15} (A^5 - a^5).\end{aligned}$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \rho \leq z \leq 6-\rho^2,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 (6\rho - \rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{32}{3}\pi.$$

(2) $x^2+y^2+z^2=2az (a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$ (含有 z 轴的部分);

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3} a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi a^3.$$

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq \rho,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{1}{4}\rho^2 \leq z \leq \sqrt{5-\rho^2},$$

于是
$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{1}{4}\rho^2}^{\sqrt{5-\rho^2}} dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 \rho (\sqrt{5-\rho^2} - \frac{\rho^2}{4}) d\rho = \frac{2}{3}\pi (5\sqrt{5} - 4).$$

13. 球心在原点、半径为 R 的球体, 在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比, 求这球体的质量.

解 密度函数为 $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq R,$$

于是
$$M = \iiint_{\Omega} k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R kr \cdot r^2 dr = k\pi R^4.$$

1. 化三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是:

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0, z=0$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz.$$

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$$

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2-x^2, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$$

提示: 曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2-x^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2+y^2=1$.

(4) 由曲面 $cz=xy(c>0)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \frac{xy}{c}, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq a\},$$

于是
$$I = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^{\frac{xy}{c}} f(x, y, z) dz.$$

提示: 区域 Ω 的上边界曲面为曲面 $cz=xy$, 下边界曲面为平面 $z=0$.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z) = x+y+z$, 计算该物体的质量.

解
$$M = \iiint_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y+\frac{1}{2}) dy$$

$$= \int_0^1 [xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y]_0^1 dx = \int_0^1 (x+1) dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 的被积函数 $f(x, y, z)$ 是三个函数 $f_1(x)$ 、

$f_2(y)$ 、 $f_3(z)$ 的乘积, 即 $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, 积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$, 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积, 即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

证明
$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_l^m f_1(x) f_2(y) f_3(z) dz \right) dy \right] dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \left[\int_c^d (f_1(x) f_2(y) \int_l^m f_3(z) dz) dy \right] dx = \int_a^b \left[(f_1(x) \int_l^m f_3(z) dz) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) f_1(x) \right] dx = \left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \int_a^b f_1(x) dx \\ &= \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz. \end{aligned}$$

4. 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2z^3 dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z=xy$, 与平面 $y=x$, $x=1$ 和 $z=0$ 所围

成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$\iiint_{\Omega} xy^2z^3 dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^{xy} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^5 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}.$$

5. 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的四

面体.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).
 \end{aligned}$$

提示:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy \\
 &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2(1+x+y)} - \frac{1}{8}y \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).
 \end{aligned}$$

6. 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dy = \int_0^1 \frac{1}{8} x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}.
 \end{aligned}$$

7. 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0$, $z=y$, $y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq y, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$\iiint_{\Omega} xz dx dy dz = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y z dz = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 \frac{1}{2} y^2 dy$$
$$= \frac{1}{6} \int_{-1}^1 x(1-x^6) dx = 0.$$

8. 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h (R > 0, h > 0)$ 所

围成的闭区域.

解 当 $0 \leq z \leq h$ 时, 过 $(0, 0, z)$ 作平行于 xOy 面的平面, 截得立体 Ω 的截面为圆 D_z : $x^2 + y^2 = (\frac{R}{h}z)^2$, 故 D_z 的半径为 $\frac{R}{h}z$, 面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$, 于是

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2},$$

于是
$$\iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) d\rho$$
$$= \pi \int_0^1 (2\rho - \rho^3 - \rho^5) d\rho = \frac{7}{12} \pi.$$

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2 dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^5) d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} d\theta = \frac{16}{3} \pi.$$

10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq 1,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \iiint_{\Omega} r^4 \cdot \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4}{5} \pi.$$

(2) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{1}{4} (2a \cos \varphi)^4 d\varphi$$

$$= 8\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{7}{6} \pi a^4.$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中 Ω 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第一

卦限内的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} xy dv = \iiint_{\Omega} \rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho d\theta dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^1 dz = \frac{1}{8}.$$

别解: 用直角坐标计算

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} xy dv &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^1 dz = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

(2) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \varphi,$$

于是
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \frac{1}{4} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{10}.\end{aligned}$$

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{5}{2} \rho \leq z \leq 5,$$

于是
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz \\ &= 2\pi \int_0^2 \rho^3 \left(5 - \frac{5}{2}\rho\right) d\rho = 8\pi.\end{aligned}$$

(4) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $0 < a \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq A$, $z \geq 0$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq A,$$

于是
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv &= \iiint_{\Omega} (r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr = \frac{4\pi}{15} (A^5 - a^5).\end{aligned}$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \rho \leq z \leq 6-\rho^2,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz$$
$$= 2\pi \int_0^2 (6\rho - \rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{32}{3}\pi.$$

(2) $x^2+y^2+z^2=2az (a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$ (含有 z 轴的部分);

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr$$
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3} a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi a^3.$$

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq \rho,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{1}{4}\rho^2 \leq z \leq \sqrt{5-\rho^2},$$

于是
$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{1}{4}\rho^2}^{\sqrt{5-\rho^2}} dz$$
$$= 2\pi \int_0^2 \rho (\sqrt{5-\rho^2} - \frac{\rho^2}{4}) d\rho = \frac{2}{3}\pi (5\sqrt{5} - 4).$$

13. 球心在原点、半径为 R 的球体, 在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比, 求这球体的质量.

解 密度函数为 $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq R,$$

于是
$$M = \iiint_{\Omega} k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R kr \cdot r^2 dr = k\pi R^4.$$

习题 9-4

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

解 位于柱面内的部分球面有两块, 其面积是相同的.

$$\text{由曲面方程 } z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \text{ 得 } \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } A &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dxdy \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho d\rho = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - a \sin \theta) d\theta = 2a^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下的部分的曲面的面积.

解 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z^2=2x$ 两式消 z 得 $x^2+y^2=2x$, 于是所求曲面在 xOy 面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2 \leq 2x$.

$$\text{由曲面方程 } \sqrt{x^2+y^2} \text{ 得 } \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\text{于是 } A = \iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \sqrt{2} \iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 1} dxdy = \sqrt{2}\pi.$$

3. 求底面半径相同的两个直交柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

解 设 A_1 为曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 相应于区域 $D: x^2+y^2 \leq R^2$ 上的面积. 则所求表面积为 $A=4A_1$.

$$\begin{aligned} A &= 4 \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = 4 \iint_D \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2+0^2} dxdy \\ &= 4 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} dxdy = 4R \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 8R \int_{-R}^R dx = 16R^2. \end{aligned}$$

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下, 求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}$, $x=x_0$, $y=0$ 所围成;

解 令密度为 $\mu=1$.

因为区域 D 可表示为 $0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq \sqrt{2px}$, 所以

$$A = \iint_D dx dy = \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^{x_0} \sqrt{2px} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2px_0^3},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} x dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} x \sqrt{2px} dx = \frac{3}{5} x_0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} y dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} px dx = \frac{3}{8} y_0,$$

所求质心为 $(\frac{3}{5}x_0, \frac{3}{8}y_0)$

(2) D 是半椭圆形闭区域 $\{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\}$;

解 令密度为 $\mu=1$. 因为闭区域 D 对称于 y 轴, 所以 $\bar{x}=0$.

$$A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \pi ab \text{ (椭圆的面积),}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{A} \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y dy = \frac{1}{A} \cdot \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4b}{3\pi},$$

所求质心为 $(0, \frac{4b}{3\pi})$.

(3) D 是介于两个圆 $r=a\cos\theta, r=b\cos\theta (0 < a < b)$ 之间的闭区域.

解 令密度为 $\mu=1$. 由对称性可知 $\bar{y}=0$.

$$A = \iint_D dx dy = \pi(\frac{b}{2})^2 - \pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2) \text{ (两圆面积的差),}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{2}{A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta} r \cos\theta \cdot r \cdot dr = \frac{a^2 + b^2 + ab}{2(a+b)},$$

所求质心是 $(\frac{a^2 + b^2 + ab}{2(a+b)}, 0)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成, 它在点 (x, y) 处的面密度 $\mu(x, y)=x^2y$, 求该薄片的质心.

$$\text{解 } M = \iint_D \mu(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 y dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (x^4 - x^6) dx = \frac{1}{35}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^3 y dy = \frac{1}{M} \int_0^1 \frac{1}{2} (x^5 - x^7) dx = \frac{35}{48},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \mu(x, y) dx dy = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 y^2 dy = \frac{1}{M} \int_0^1 \frac{1}{3} (x^5 - x^8) dx = \frac{35}{54},$$

质心坐标为 $(\frac{35}{48}, \frac{35}{54})$.

6. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为 a , 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求这薄片的质心.

解 建立坐标系, 使薄片在第一象限, 且直角边在坐标轴上. 薄片上点 (x, y) 处的函数为 $\mu = x^2 + y^2$. 由对称性可知 $\bar{x} = \bar{y}$.

$$M = \iint_D \mu(x, y) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{6} a^4,$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \frac{1}{M} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy = \frac{2}{5} a,$$

薄片的质心坐标为 $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围成立体的质心(设密度 $\rho=1$):

(1) $z^2 = x^2 + y^2, z=1$;

解 由对称性可知, 重心在 z 轴上, 故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \frac{1}{3} \pi \text{ (圆锥的体积),}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 z dz = \frac{3}{4},$$

所求立体的质心为 $(0, 0, \frac{3}{4})$.

(2) $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (A > a > 0), z=0$;

解 由对称性可知, 重心在 z 轴上, 故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \frac{2}{3}\pi A^3 - \frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi(A^3 - a^3) \text{ (两个半球体体积的差)},$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} r^3 \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi d\theta = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^A r^3 dr = \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)},$$

所求立体的质心为 $(0, 0, \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)})$.

$$(3) z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } V &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^a [x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3] dx = \frac{1}{6}a^4, \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dv = \frac{1}{V} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{\frac{1}{15}a^5}{\frac{1}{6}a^4} = \frac{2}{5}a,$$

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5}a,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z dz = \frac{7}{30}a^2,$$

所以立体的重心为 $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2)$.

8. 设球体占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$, 它在内部各点的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方, 试求这球体的质心.

解 球体密度为 $\rho = x^2 + y^2 + z^2$. 由对称性可知质心在 z 轴上, 即 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

在球面坐标下 Ω 可表示为: $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2R \cos \varphi$, 于是

$$M = \iiint_{\Omega} \rho dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^2 \cdot r^2 dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5} R^5 \sin \varphi \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{32}{15} \pi R^5,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho z dv = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^5 dr$$

$$= \frac{2\pi}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{6} R^6 \sin \varphi \cos^7 \varphi d\varphi = \frac{\frac{8}{3} \pi R^6}{\frac{32}{15} \pi R^5} = \frac{5}{4} R,$$

故球体的质心为 $(0, 0, \frac{5}{4}R)$.

9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下, 求指定的转动惯量:

(1) $D = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, 求 I_y ;

解 积分区域 D 可表示为

$$-a \leq x \leq a, -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

于是
$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_{-a}^a x^2 dx \int_{-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy = \frac{2b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^3 b.$$

提示:
$$\int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \stackrel{x = a \sin t}{=} \frac{a^4}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 2t dt = \frac{\pi}{8} a^4.$$

(2) D 由抛物线 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 与直线 $x=2$ 所围成, 求 I_x 和 I_y ;

解 积分区域可表示为

$$0 \leq x \leq 2, -3\sqrt{x/2} \leq y \leq 3\sqrt{x/2},$$

于是
$$I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^2 dx \int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}} y^2 dy = \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{27}{2\sqrt{2}} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{72}{5},$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^2 x^2 dx \int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}} dy = \frac{6}{\sqrt{2}} \int_0^2 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{96}{7}.$$

(3) D 为矩形闭区域 $\{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, 求 I_x 和 I_y .

解 $I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = a \cdot \frac{1}{3} b^3 = \frac{ab^3}{3},$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy = \frac{1}{3} a^3 \cdot b = \frac{a^3 b}{3}.$$

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h , 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 取形心为原点, 取两旋转轴为坐标轴, 建立坐标系.

$$I_x = \iint_D y^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} \mu b h^3,$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy = \frac{1}{12} \mu h b^3.$$

11. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$, $|x|=a$, $|y|=a$ 所围成,

(1)求物体的体积;

解 由对称可知

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= 4 \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy = 4 \int_0^a (ax^2 + \frac{a^3}{3}) dx = \frac{8}{3} a^4. \end{aligned}$$

(2)求物体的质心;

解 由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho z dv = \frac{4}{V} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} z dz \\ &= \frac{2}{V} \int_0^a dx \int_0^a (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{2}{V} \int_0^a (ax^4 + \frac{2}{3} a^3 x^2 + \frac{a^5}{5}) dx = \frac{7}{15} a^2. \end{aligned}$$

(3)求物体关于 z 轴的转动惯量.

$$\begin{aligned}\text{解 } I_z &= \iiint_{\Omega} \rho(x^2 + y^2) dv = 4\rho \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2) dz \\ &= 4\rho \int_0^a dx \int_0^a (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy = 4\rho \frac{28}{45} a^6 = \frac{112}{45} \rho a^6.\end{aligned}$$

12. 求半径为 a 、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\rho=1$).

解 建立坐标系, 使圆柱体的底面在 xOy 面上, z 轴通过圆柱体的轴心. 用柱面坐标计算.

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dv = \iiint_{\Omega} r^3 dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr \int_0^h dz = \frac{1}{2} \pi h a^4.$$

13. 设面密度为常量 μ 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D = \{(x, y, 0) | R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2, x \geq 0\}$, 求它对位于 z 轴上点 $M_0(0, 0, a)$ ($a > 0$) 处单位质量的质点的引力 \mathbf{F} .

解 引力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, 由对称性, $F_y = 0$, 而

$$\begin{aligned}F_x &= G \iint_D \frac{\mu x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} d\sigma \\ &= G\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \rho d\rho \\ &= 2G\mu \left[\ln \frac{\sqrt{R_2^2 + a^2} + R_2}{\sqrt{R_1^2 + a^2} + R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right], \\ F_z &= -Ga \iint_D \frac{\mu d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = -Ga\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \pi Ga\mu \left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right].\end{aligned}$$

14. 设均匀柱体密度为 ρ , 占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, 求它对于位于点 $M_0(0, 0, a)$ ($a > h$) 处单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性可知, 沿 x 轴与 y 轴方向的分力互相抵消, 故 $F_x = F_y = 0$,

而

$$\begin{aligned} F_z &= \iiint_{\Omega} G\rho \frac{a-z}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}} dv \\ &= G\rho \int_0^h (a-z) dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}} \\ &= G\rho \int_0^h (a-z) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{rdr}{[r^2+(a-z)^2]^{3/2}} \\ &= 2\pi G\rho \int_0^h (a-z) \left[\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}} \right] dz \\ &= 2\pi G\rho [h + \sqrt{R^2+(a-h)^2} - \sqrt{R^2+a^2}]. \end{aligned}$$

总习题九

1. 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论:

(1) 设有空间闭区域

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

则有_____.

$$(A) \iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv; (B) \iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv;$$

$$(C) \iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv; (D) \iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv.$$

解 (C).

提示: $f(x, y, z) = x$ 是关于 x 的奇函数, 它在关于 yOz 平面对称的区域 Ω_1 上的三重积分为零, 而在 Ω_2 上的三重积分不为零, 所以 (A) 是错的. 类似地, (B) 和 (D) 也是错的.

$f(x, y, z) = z$ 是关于 x 和 y 的偶函数, 它关于 yOz 平面和 zOx 面都对称的区域 Ω_1 上的三重积分可以化为 Ω_1 在第一卦部分 Ω_2 上的三重积分的四倍.

(2) 设有平面闭区域 $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, 则

$$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = \text{_____}.$$

$$(A) 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy; (B) 2 \iint_{D_1} xy dx dy; (C) 4 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy; (D) 0.$$

解 (A).

2. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (1+x) \sin y d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ 和 $(0, 1)$ 的梯形闭区域;

解 积分区域可表示为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x+1\}$, 于是

$$\iint_D (1+x) \sin y d\sigma = \int_0^1 (1+x) dx \int_0^{x+1} \sin y dy = \int_0^1 (1+x) [1 - \cos(x+1)] dx$$

$$= \frac{3}{2} + \cos 1 + \sin 1 - \cos 2 - 2 \sin 2.$$

(2) $\iint_D (x^2 - y^2) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$;

$$\begin{aligned}\text{解 } \iint_D (x^2 - y^2) d\sigma &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} (x^2 - y^2) dy = \int_0^\pi (x^2 \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x) dx \\ &= \pi^2 - \frac{40}{9}.\end{aligned}$$

$$(3) \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是圆周 } x^2 + y^2 = Rx \text{ 所围成的闭区域};$$

解 在极坐标下积分区域 D 可表示为

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq R \cos \theta,$$

$$\begin{aligned}\text{于是 } \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma &= \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{R^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin^3 \theta|) d\theta = \frac{2R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{1}{9} (3\pi - 4) R^3.\end{aligned}$$

$$(4) \iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

解 因为积分区域 D 关于 x 轴、 y 轴对称, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D 3x d\sigma &= \iint_D 6y d\sigma = 0. \\ \iint_D 9 d\sigma &= 9 \iint_D d\sigma = 9\pi R^2.\end{aligned}$$

$$\text{因为 } \iint_D y^2 d\sigma = \iint_D x^2 d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma,$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma &= 9\pi R^2 + \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= 9\pi R^2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \cdot \rho d\rho = 9\pi R^2 + \frac{\pi}{4} R^4.\end{aligned}$$

3. 交换下列二次积分的次序:

$$(1) \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx;$$

解 积分区域为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, -\sqrt{4-y} \leq x \leq \frac{1}{2}(y-4)\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) | -2 \leq x \leq 0, 2x+4 \leq y \leq -x^2+4\},$$

所以
$$\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx = \int_{-2}^0 dx \int_{2x+4}^{-x^2+4} f(x, y) dy.$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx;$$

解 积分区域为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y\} \cup \{(x, y) | 1 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 3-y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}x \leq y \leq 3-x\},$$

所以
$$\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx = \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x, y) dy.$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

解 积分区域为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1+\sqrt{1-x^2}\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\} \cup \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2}\},$$

所以
$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

4. 证明:

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$$

证明 积分区域为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq a, 0 \leq x \leq y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\},$$

所以 $\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a dx \int_x^a e^{m(a-x)} f(x) dy = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$

5. 把积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}.$

解 在极坐标下积分区域可表示为 $D = D_1 + D_2 + D_3,$

其中 $D_1: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \tan \theta \sec \theta,$

$D_2: \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \csc \theta,$

$D_3: \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq \tan \theta \sec \theta,$

所以
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \\ &\quad + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

6. 把积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为三次积分, 其中积分区域 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2, y = x^2$ 及平面 $y = 1, z = 0$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$\Omega: 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1,$

所以
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$$

7. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz (R > 0)$ 的公共部分;

解 两球面的公共部分在 xOy 面上的投影 $x^2 + y^2 \leq (\frac{\sqrt{3}}{2}R)^2,$

在柱面坐标下积分区域可表示为

$\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2}R, R - \sqrt{R^2 - \rho^2} \leq z \leq R\sqrt{R^2 - \rho^2},$

所以
$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z^2 \rho dz$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \frac{1}{3} [(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - (R - \sqrt{R^2 - \rho^2})^3] \rho d\rho = \frac{59}{480} \pi R^5.$$

(2)
$$\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$$
, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域;

解 因为积分区域 Ω 关于 xOy 面对称, 而被积函数为关于 z 的奇函数,

所以
$$\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv = 0.$$

(3)
$$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$$
, 其中 Ω 是由 xOy 面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所

围成的闭区域.

解 曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面的方程为 $y^2 + z^2 = 2x$. 由曲面 $y^2 + z^2 = 2x$ 和平面 $x=5$ 所围成的闭区域 Ω 在 yOz 面上的投影区域为

$$D_{yz}: y^2 + z^2 \leq (\sqrt{10})^2,$$

在柱面坐标下此区域又可表示为

$$D_{yz}: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{10}, \frac{1}{2}\rho^2 \leq x \leq 5,$$

所以
$$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{10}} d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^5 \rho^2 \cdot \rho dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{10}} \rho^3 (5 - \frac{1}{2}\rho^2) d\rho = \frac{250}{3} \pi.$$

8. 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面的方程可写为 $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$, 所割部分在 xOy 面上的投影区域为

$$D = \{(x, y) | \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

于是
$$A = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} dx dy$$

$$= \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} \iint_D dx dy = \frac{1}{2} ab \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}.$$

9. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 设所求矩形另一边的长度为 H , 建立坐标系, 使半圆的直径在 x 轴上, 圆心在原点. 不妨设密度为 $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.

由对称性及已知条件可知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 即

$$\iint_D y dx dy = 0,$$

从而
$$\int_{-R}^R dx \int_{-H}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y dy = 0,$$

即
$$\int_{-R}^R \frac{1}{2} [(R^2 - x^2) - H^2] dx = 0,$$

亦即
$$R^3 - \frac{1}{3} R^2 - RH^2 = 0,$$

从而
$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

因此, 接上去的均匀矩形薄片另一边的长度为 $\sqrt{\frac{2}{3}} R$.

10. 求由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 μ) 对于直线 $y = -1$ 的转动惯量.

解 抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成区域可表示为

$$D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\},$$

所求转动惯量为

$$I = \iint_D \mu(y+1)^2 dx dy = \mu \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y+1)^2 dy = \frac{1}{3} \mu \int_{-1}^1 [8 - (x^2+1)^3] dx = \frac{368}{105} \mu.$$

11. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片, 占有平面闭域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$, 过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P , $OP = a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解 设 P 点的坐标为 $(0, 0, a)$. 薄片的面密度为 $\mu = \frac{M}{\frac{1}{2} \pi R^2} = \frac{2M}{\pi R^2}$.

设所求引力为 $\mathbf{F}=(F_x, F_y, F_z)$.

由于薄片关于y轴对称, 所以引力在x轴上的分量 $F_x=0$, 而

$$\begin{aligned} F_y &= G \iint_D \frac{m\mu y}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} d\sigma = m\mu G \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho^2 \sin\theta}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho \\ &= m\mu G \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho = 2m\mu G \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho \\ &= \frac{4GmM}{\pi R^2} \left(\ln \frac{R + \sqrt{a^2 + R^2}}{a} - \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right), \\ F_z &= -G \iint_D \frac{m\mu a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} d\sigma = -m\mu Ga \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho \\ &= -\pi m\mu Ga \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho = -\frac{2GmM}{R^2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

习题 10-1

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L , 在点 (x, y) 处它的线密度为 $\mu(x, y)$, 用对弧长的曲线积分分别表达:

(1) 这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x, I_y ;

(2) 这曲线弧的重心坐标 \bar{x}, \bar{y} .

解 在曲线弧 L 上任取一长度很短的小弧段 ds (它的长度也记做 ds), 设 (x, y) 为小弧段 ds 上任一点.

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的转动惯量元素分别为

$$dI_x = y^2 \mu(x, y) ds, \quad dI_y = x^2 \mu(x, y) ds.$$

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) ds, \quad I_y = \int_L x^2 \mu(x, y) ds.$$

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的静矩元素分别为

$$dM_x = y \mu(x, y) ds, \quad dM_y = x \mu(x, y) ds.$$

曲线 L 的重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明: 如果曲线弧 L 分为两段光滑曲线 L_1 和 L_2 , 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds.$$

证明 划分 L , 使得 L_1 和 L_2 的连接点永远作为一个分点, 则

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta s_i\} \rightarrow 0$, 上式两边同时取极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

即得 $\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds.$

3. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n ds$, 其中 L 为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t (0\leq t\leq 2\pi)$;

$$\begin{aligned}\text{解 } \oint_L (x^2+y^2)^n ds &= \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^n \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^n \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^{2n+1} dt = 2\pi a^{2n+1}.\end{aligned}$$

(2) $\int_L (x+y)ds$, 其中 L 为连接(1, 0)及(0, 1)两点的直线段;

解 L 的方程为 $y=1-x (0\leq x\leq 1)$;

$$\int_L (x+y)ds = \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1+[(1-x)']^2} dx = \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{2} dx = \sqrt{2}.$$

(3) $\oint_L xdx$, 其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界;

解 $L_1: y=x^2 (0\leq x\leq 1), L_2: y=x (0\leq x\leq 1)$.

$$\begin{aligned}\oint_L xdx &= \int_{L_1} xdx + \int_{L_2} xdx \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1+[(x^2)']^2} dx + \int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2} dx \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2} dx + \int_0^1 \sqrt{2} x dx = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

(4) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, 直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

解 $L=L_1+L_2+L_3$, 其中

$$L_1: x=x, y=0 (0\leq x\leq a),$$

$$L_2: x=a\cos t, y=a\sin t \quad (0\leq t\leq \frac{\pi}{4}),$$

$$L_3: x=x, y=x \quad (0\leq x\leq \frac{\sqrt{2}}{2}a),$$

因而 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds,$

$$\begin{aligned}&= \int_0^a e^x \sqrt{1^2+0^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} dt + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{1^2+1^2} dx \\ &= e^a(2+\frac{\pi}{4}a)-2.\end{aligned}$$

(5) $\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$, 其中 Γ 为曲线 $x=e^t \cos t, y=e^t \sin t, z=e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;

$$\begin{aligned}\text{解 } ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + e^{2t}} dt = \sqrt{3} e^t dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds &= \int_0^2 \frac{1}{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t}} \sqrt{3} e^t dt \\ &= \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t} dt = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t}\right]_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - e^{-2}).\end{aligned}$$

(6) $\int_{\Gamma} x^2 y z ds$, 其中 Γ 为折线 $ABCD$, 这里 A, B, C, D 依次为点 $(0, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 2)$ 、 $(1, 0, 2)$ 、 $(1, 3, 2)$;

解 $\Gamma = AB + BC + CD$, 其中

$$AB: x=0, y=0, z=t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$BC: x=t, y=0, z=2 \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$CD: x=1, y=t, z=2 \quad (0 \leq t \leq 3),$$

$$\begin{aligned}\text{故 } \int_{\Gamma} x^2 y z ds &= \int_{AB} x^2 y z ds + \int_{BC} x^2 y z ds + \int_{CD} x^2 y z ds \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 0 dt + \int_0^3 2t \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} dt = 9.\end{aligned}$$

(7) $\int_L y^2 ds$, 其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$;

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_L y^2 ds &= \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 \sqrt{[a(t-\sin t)]'^2 + [a(1-\cos t)]'^2} dt \\ &= \sqrt{2} a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sqrt{1-\cos t} dt = \frac{256}{15} a^3.\end{aligned}$$

(8) $\int_L (x^2 + y^2) ds$, 其中 L 为曲线 $x=a(\cos t + t \sin t), y=a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2} dt = a dt \\ \int_L (x^2 + y^2) ds &= \int_0^{2\pi} [a^2 (\cos t + t \sin t)^2 + a^2 (\sin t - t \cos t)^2] a dt\end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} a^3(1+t^2)tdt = 2\pi^2 a^3(1+2\pi^2).$$

4. 求半径为 a , 中心角为 2φ 的均匀圆弧(线密度 $\mu=1$) 的重心.

解 建立坐标系如图 10-4 所示, 由对称性可知 $\bar{y}=0$, 又

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{2\varphi a} \int_L x ds = \frac{1}{2\varphi a} \int_{-\varphi}^{\varphi} a \cos \theta \cdot a d\theta = \frac{a \sin \varphi}{\varphi},$$

所以圆弧的重心为 $(\frac{a \sin \varphi}{\varphi}, 0)$

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a \cos t, y=a \sin t, z=kt$, 其中 $0 \leq t \leq 2\pi$, 它的线密度 $\rho(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$, 求:

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z ; (2) 它的重心.

解 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \sqrt{a^2 + k^2} dt$.

$$\begin{aligned} (1) I_z &= \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt = \frac{2}{3} \pi a^2 \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) M &= \int_L \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_L x(x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} a \cos t (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{6\pi a k^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{M} \int_L y(x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} a \sin t (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{-6\pi a k^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \int_L z(x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} k t (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{3\pi k (a^2 + 2\pi^2 k^2)}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \end{aligned}$$

故重心坐标为 $(\frac{6\pi a k^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, -\frac{6\pi a k^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \frac{3\pi k (a^2 + 2\pi^2 k^2)}{3a^2 + 4\pi^2 k^2})$.

习题 10-2

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段, 证明: $\int_L P(x,y)dx=0$.

证明 设 L 是直线 $x=a$ 上由 (a, b_1) 到 (a, b_2) 的一段,
则 $L: x=a, y=t, t$ 从 b_1 变到 b_2 . 于是

$$\int_L P(x,y)dx = \int_{b_1}^{b_2} P(a,t) \left(\frac{da}{dt}\right) dt = \int_{b_1}^{b_2} P(a,t) \cdot 0 dt = 0.$$

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a, 0)$ 到 $(b, 0)$ 的一段直线,

证明 $\int_L P(x,y)dx = \int_a^b P(x,0)dx$.

证明 $L: x=x, y=0, t$ 从 a 变到 b , 所以

$$\int_L P(x,y)dx = \int_a^b P(x,0)(x)'dx = \int_a^b P(x,0)dx.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_L (x^2 - y^2)dx$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 4)$

的一段弧;

解 $L: y=x^2, x$ 从 0 变到 2, 所以

$$\int_L (x^2 - y^2)dx = \int_0^2 (x^2 - x^4)dx = -\frac{56}{15}.$$

(2) $\oint_L xydx$, 其中 L 为圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (a>0)$ 及 x 轴所围成的在第

一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

解 $L=L_1+L_2$, 其中

$L_1: x=a+a\cos t, y=a\sin t, t$ 从 0 变到 π ,

$L_2: x=x, y=0, x$ 从 0 变到 $2a$,

因此 $\oint_L xydx = \int_{L_1} xydx + \int_{L_2} xydx$

$$= \int_0^\pi a(1+\cos t)a\sin t(a+a\cos t)'dt + \int_0^{2a} 0dx$$

$$= -a^3 \left(\int_0^\pi \sin^2 t dt + \int_0^\pi \sin^2 t d\sin t \right) = -\frac{\pi}{2}a^3.$$

(3) $\int_L ydx + xdy$, 其中 L 为圆周 $x=R\cos t, y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到

$\frac{\pi}{2}$ 的一段弧;

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_L ydx + xdy &= \int_0^\pi [R\sin t(-R\sin t) + R\cos t R\cos t]dt \\ &= R^2 \int_0^\pi \cos 2t dt = 0.\end{aligned}$$

$$(4) \oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}, \text{ 其中 } L \text{ 为圆周 } x^2 + y^2 = a^2 \text{ (按逆时针方向绕行);}$$

解 圆周的参数方程为: $x = a\cos t, y = a\sin t, t$ 从 0 变到 2π , 所以

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} [(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)(a\cos t)]dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} -a^2 dt = -2\pi.\end{aligned}$$

(5) $\int_\Gamma x^2 dx + zdy - ydz$, 其中 Γ 为曲线 $x = k\theta, y = a\cos\theta, z = a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧;

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_\Gamma x^2 dx + zdy - ydz &= \int_0^\pi [(k\theta)^2 k + a\sin\theta(-a\sin\theta) - a\cos\theta a\cos\theta]d\theta \\ &= \int_0^\pi (k^3\theta^2 - a^2)d\theta = \frac{1}{3}\pi^3 k^3 - \pi a^2.\end{aligned}$$

(6) $\int_\Gamma xdx + ydy + (x+y-1)dz$, 其中 Γ 是从点(1, 1, 1)到点(2, 3, 4)的一段直线;

解 Γ 的参数方程为 $x=1+t, y=1+2t, z=1+3t, t$ 从 0 变到 1.

$$\begin{aligned}\int_\Gamma xdx + ydy + (x+y-1)dz &= \int_0^1 [(1+t) + 2(1+2t) + 3(1+t+1+2t-1)]dt \\ &= \int_0^1 (6+14t)dt = 13.\end{aligned}$$

$$(7) \oint_\Gamma dx - dy + ydz, \text{ 其中 } \Gamma \text{ 为有向闭折线 } ABCA, \text{ 这里的 } A, B, C$$

依次为点(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1);

解 $\Gamma = AB + BC + CA$, 其中

AB : $x=x, y=1-x, z=0, x$ 从 1 变到 0,

BC : $x=0, y=1-z, z=z, z$ 从 0 变到 1,

CA: $x=x, y=0, z=1-x, x$ 从 0 变到 1,

故
$$\oint_{\Gamma} dx-dy+yz = \int_{AB} dx-dy+yz + \int_{BC} dx-dy+yz + \int_{CA} dx-dy+yz$$
$$= \int_0^1 [1-(1-x)']dx + \int_0^1 [-(1-z)' + (1-z)]dt + \int_0^1 dx = \frac{1}{2}.$$

(8) $\int_L (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从 $(-1, 1)$

到 $(1, 1)$ 的一段弧.

解 $L: x=x, y=x^2, x$ 从 -1 变到 1 , 故

$$\begin{aligned} & \int_L (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy \\ &= \int_{-1}^1 [(x^2-2x^3) + (x^4-2x^3)2x]dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2-4x^4)dx = -\frac{14}{15} \end{aligned}$$

4. 计算 $\int_L (x+y)dx + (y-x)dy$, 其中 L 是:

(1) 抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(1, 1)$ 到点 $(4, 2)$ 的一段弧;

解 $L: x=y^2, y=y, y$ 从 1 变到 2 , 故

$$\begin{aligned} & \int_L (x+y)dx + (y-x)dy \\ &= \int_1^2 [(y^2+y) \cdot 2y + (y-y^2) \cdot 1]dy = \frac{34}{3}. \end{aligned}$$

(2) 从点 $(1, 1)$ 到点 $(4, 2)$ 的直线段;

解 $L: x=3y-2, y=y, y$ 从 1 变到 2 , 故

$$\begin{aligned} & \int_L (x+y)dx + (y-x)dy \\ &= \int_1^2 [(3y-2+y) \cdot y + (y-3y+2) \cdot 1]dy = 11 \end{aligned}$$

(3) 先沿直线从点 $(1, 1)$ 到 $(1, 2)$, 然后再沿直线到点 $(4, 2)$ 的折线;

解 $L=L_1+L_2$, 其中

$L_1: x=1, y=y, y$ 从 1 变到 2 ,

$L_2: x=x, y=2, x$ 从 1 变到 4 ,

故
$$\begin{aligned} & \int_L (x+y)dx + (y-x)dy \\ &= \int_{L_1} (x+y)dx + (y-x)dy + \int_{L_2} (x+y)dx + (y-x)dy \end{aligned}$$

$$= \int_1^2 (y-1)dy + \int_1^4 (x+2)dx = 14.$$

(4) 沿曲线 $x=2t^2+t+1$, $y=t^2+1$ 上从点(1, 1)到(4, 2)的一段弧.

解 L : $x=2t^2+t+1$, $y=t^2+1$, t 从 0 变到 1, 故

$$\begin{aligned} & \int_L (x+y)dx + (y-x)dy \\ &= \int_0^1 [(3t^2+t+2)(4t+1) + (-t^2-t) \cdot 2t] dt = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

5. 一力场由沿横轴正方向的常力 \mathbf{F} 所构成, 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段时场力所作的功.

解 已知场力为 $\mathbf{F}=(|\mathbf{F}|, 0)$, 曲线 L 的参数方程为

$$x=R \cos \theta, y=R \sin \theta,$$

θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$, 于是场力所作的功为

$$W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L |\mathbf{F}| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\mathbf{F}| \cdot (-R \sin \theta) d\theta = -|\mathbf{F}| R.$$

6. 设 z 轴与力方向一致, 求质量为 m 的质点从位置 (x_1, y_1, z_1) 沿直线移到 (x_2, y_2, z_2) 时重力作的功.

解 已知 $\mathbf{F}=(0, 0, mg)$. 设 Γ 为从 (x_1, y_1, z_1) 到 (x_2, y_2, z_2) 的直线, 则重力所作的功为

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} 0dx + 0dy + mgdz = mg \int_{z_1}^{z_2} dz = mg(z_2 - z_1).$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 化成对弧长的曲线积分, 其中 L 为:

(1) 在 xOy 面内沿直线从点(0, 0)到(1, 1);

解 L 的方向余弦 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

故 $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$$\begin{aligned} &= \int_L [P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\cos \beta] ds \\ &= \int_L \frac{P(x, y) + Q(x, y)}{\sqrt{2}} ds. \end{aligned}$$

(2) 沿抛物线 $y=x^2$ 从点(0, 0)到(1, 1);

解 曲线 L 上点 (x, y) 处的切向量为 $\tau=(1, 2x)$, 单位切向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta)=e_{\tau}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}, \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right),$$

故

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_L [P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\cos \beta]ds \\ &= \int_L \frac{P(x, y) + 2xQ(x, y)}{\sqrt{1+4x^2}}ds. \end{aligned}$$

(3) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$.

解 L 的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}$, 其上任一点的切向量为

$$\tau=(1, \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}),$$

单位切向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta)=e_{\tau}=(\sqrt{2x-x^2}, 1-x),$$

故

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_L [P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\cos \beta]ds \\ &= \int_L [\sqrt{2x-x^2}P(x, y) + (1-x)Q(x, y)]ds. \end{aligned}$$

8. 设 Γ 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧, 把对坐标的曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 化成对弧长的曲线积分.

解 曲线 Γ 上任一点的切向量为

$$\tau=(1, 2t, 3t^2)=(1, 2x, 3y),$$

单位切向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)=e_{\tau}=\frac{1}{\sqrt{1+2x^2+9y^2}}(1, 2x, 3y),$$

$$\begin{aligned} & \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} [P\cos \alpha + Q\cos \beta + R\cos \gamma]ds \\ &= \int_L \frac{P + 2xQ + 3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}ds. \end{aligned}$$

习题 10-3

1. 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性:

(1) $\oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$, 其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 及 $y^2 = x$ 所围

成的区域的正向边界曲线;

解 $L = L_1 + L_2$, 故

$$\begin{aligned} & \oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy \\ &= \int_{L_1} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy + \int_{L_2} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy \\ &= \int_0^1 [(2x^3 - x^2) + (x + x^4)2x]dx + \int_1^0 [(2y^3 - y^4)2y + (y^2 + y^2)]dy \\ &= \int_0^1 (2x^5 + 2x^3 + x^2)dx - \int_0^1 (-2y^5 + 4y^4 + 2y^2)dy = \frac{1}{30}, \end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (1 - 2x) dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (1 - 2x) dx \\ &= \int_0^1 (y^{\frac{1}{2}} - y - y^2 + y^4) dy = \frac{1}{30}, \end{aligned}$$

所以
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

(2) $\oint_L (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中 L 是四个顶点分别为 $(0, 0)$ 、

$(2, 0)$ 、 $(2, 2)$ 、和 $(0, 2)$ 的正方形区域的正向边界.

解 $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, 故

$$\begin{aligned} & \oint_L (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\ &= \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4} \right) (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\ &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 (y^2 - 4y)dy + \int_2^0 (x^2 - 8x)dx + \int_2^0 y^2 dy \\ &= \int_0^2 8x dx + \int_0^2 -4y dy = 8, \end{aligned}$$

而
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-2y + 3xy^2) dx dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 (-2y + 3xy^2) dy = \int_0^2 (8x - 4) dx = 8,$$

所以 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$

2. 利用曲线积分, 求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$;

$$\begin{aligned} \text{解 } A &= \oint_L -y dx = \int_0^{2\pi} -a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \cdot (-\sin t) dt \\ &= 3a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

(2) 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$;

解 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$ 的参数方程为

$x = 4 \cos \theta, y = 3 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 故

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [4 \cos \theta \cdot 3 \cos \theta - 3 \sin \theta \cdot (-4 \sin \theta)] d\theta \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\theta = 12\pi. \end{aligned}$$

(3) 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$.

解 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$ 的参数方程为 $x = a + a \cos \theta, y = a \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$\begin{aligned} \text{故 } A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(1 + \cos \theta) \cdot a \cos \theta - a \sin \theta \cdot (-a \sin \theta)] d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) d\theta = \pi a^2. \end{aligned}$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)}$, 其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, L 的方

向为逆时针方向.

解 $P = \frac{y}{2(x^2 + y^2)}, Q = \frac{-x}{2(x^2 + y^2)}$. 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

在 L 内作逆时针方向的 ε 小圆周

$$l: x = \varepsilon \cos \theta, y = \varepsilon \sin \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

在以 L 和 l 为边界的闭区域 D_ε 上利用格林公式得

$$\oint_{L+l^-} Pdx + Qdy = \iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

$$\text{即 } \oint_L Pdx + Qdy = - \oint_{l^-} Pdx + Qdy = \oint_l Pdx + Qdy.$$

$$\text{因此 } \oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} = \oint_l \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} = \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon^2 \sin^2 \theta - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}{2\varepsilon^2} d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = -\pi.$$

4. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值:

$$(1) \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy;$$

解 $P=x+y, Q=x-y$, 显然 P, Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 而且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

故在整个 xOy 面内, 积分与路径无关.

取 L 为点 $(1, 1)$ 到 $(2, 3)$ 的直线 $y=2x-1, x$ 从 1 变到 2, 则

$$\begin{aligned} \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy &= \int_1^2 [(3x-1) + 2(1-x)]dx \\ &= \int_1^2 (1+x)dx = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$(2) \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy;$$

解 $P=6xy^2-y^3$, $Q=6x^2y-3xy^2$, 显然 P 、 Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 并且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2$, 故积分与路径无关, 取路径 $(1, 2) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (3, 4)$ 的折线, 则

$$\begin{aligned} & \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2-y^3)dx + (6x^2y-3xy^2)dy \\ &= \int_2^4 6y-3y^2 dy + \int_1^3 (96x-64)dx = 236. \end{aligned}$$

$$(3) \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy-y^4+3)dx + (x^2-4xy^3)dy.$$

解 $P=2xy-y^4+3$, $Q=x^2-4xy^3$, 显然 P 、 Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 并且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3$, 所以在整个 xOy 面内积分与路径无关, 选取路径为从 $(1, 0) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 1)$ 的折线, 则

$$\begin{aligned} & \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy-y^4+3)dx + (x^2-4xy^3)dy \\ &= \int_0^1 (1-4y^3)dy + \int_1^2 2(x+1)dx = 5. \end{aligned}$$

5. 利用格林公式, 计算下列曲线积分:

$$(1) \oint_L (2x-y+4)dx + (5y+3x-6)dy, \text{ 其中 } L \text{ 为三顶点分别为 } (0, 0)、$$

$(3, 0)$ 和 $(3, 2)$ 的三角形正向边界;

解 L 所围区域 D 如图所示, $P=2x-y+4$, $Q=5y+3x-6$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 - (-1) = 4,$$

故由格林公式, 得

$$\begin{aligned} \oint_L (2x-y+4)dx + (5y+3x-6)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D 4 dx dy = 12. \end{aligned}$$

$$(2) \oint_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x)dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)dy, \text{ 其中 } L \text{ 为正}$$

向星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a>0)$;

解 $P=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x$, $Q=x^2\sin x-2ye^x$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x)-(2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x)=0,$$

由格林公式

$$\oint_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy \\ =\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

(3) $\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$, 其中 L 为在抛物线

$2x=\pi y^2$ 上由点 $(0, 0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧;

解 $P=2xy^3-y^2\cos x$, $Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(-2y\cos x+6xy^2)-(6xy^2-2y\cos x)=0,$$

所以由格林公式

$$\int_{L+OA+OB} Pdx+Qdy=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

其中 L 、 OA 、 OB 、及 D 如图所示.

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \int_L Pdx+Qdy &= \int_{OA+AB} Pdx+Qdy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx + \int_0^1 (1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2)dy = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

(4) $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$, 其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由

点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧.

解 $P=x^2-y$, $Q=-x-\sin^2 y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1-(-1)=0$,

由格林公式有

$$\int_{L+AB+BO} Pdx+Qdy=-\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

其中 L 、 AB 、 BO 及 D 如图所示.

故
$$\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy = \int_{BA+OB} (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$$

$$= \int_0^1 -(1 + \sin^2 y)dy + \int_0^1 x^2 dx = -\frac{7}{6} + \frac{1}{4} \sin 2.$$

6. 验证下列 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求这样的一个 $u(x, y)$:

(1) $(x+2y)dx + (2x+y)dy$;

证明 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 面内的函数 $u(x, y)$ 的全微分.

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x+2y)dx + (2x+y)dy + C = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + C.$$

(2) $2xydx + x^2dy$;

解 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 面内的函数 $u(x, y)$ 的全微分.

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 2xydx + x^2dy + C = \int_0^y 0dy + \int_0^x 2xydx + C = x^2y + C.$$

(3) $4\sin x \sin 3y \cos x dx - 3\cos 3y \cos 2x dy$

解 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6\cos 3y \sin 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 平面内的函数 $u(x, y)$ 的全微分.

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 4\sin x \sin 3y \cos x dx - 3\cos 3y \cos 2x dy + C$$

$$= \int_0^x 0 dx + \int_0^y -3\cos 3y \cos 2x dy + C = -\cos 2x \sin 3y + C.$$

(4) $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$

解 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 平面内的函数 $u(x, y)$ 的全微分.

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy + C$$

$$= \int_0^y 12ye^y dy + \int_0^x (3x^2y + 8xy^2)dx + C$$

$$=x^3y+4x^2y^2+12(ye^y-e^y)+C.$$

$$(5) (2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$$

解 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是

某个函数 $u(x,y)$ 的全微分

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x 2xdx + \int_0^y (2y\sin x - x^2\sin y)dy + C \\ &= y^2\sin x + x^2\cos y + C. \end{aligned}$$

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2$, $Y=2xy-8$, 这变力确定了一个力场, 证明质点在此场内移动时, 场力所做的功与路径无关.

解 场力所作的功为 $W = \int_{\Gamma} (x+y^2)dx + (2xy-8)dy$.

由于 $\frac{\partial Y}{\partial x} = 2y = \frac{\partial X}{\partial y}$, 故以上曲线积分与路径无关, 即场力所作的功与路径无关.

习题 10-4

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ , 在点 (x, y, z) 处它的面密度为 $\mu(x, y, z)$, 用对面积的曲面积分表达这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解. 假设 $\mu(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上连续, 应用元素法, 在曲面 Σ 上任意一点 (x, y, z) 处取包含该点的一直径很小的曲面块 dS (它的面积也记做 dS), 则对于 x 轴的转动惯量元素为

$$dI_x = (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS,$$

对于 x 轴的转动惯量为

$$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS,$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

证明 划分 Σ_1 为 m 部分, $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_m$;

划分 Σ_2 为 n 部分, $\Delta S_{m+1}, \Delta S_{m+2}, \dots, \Delta S_{m+n}$,

则 $\Delta S_1, \dots, \Delta S_m, \Delta S_{m+1}, \dots, \Delta S_{m+n}$ 为 Σ 的一个划分, 并且

$$\sum_{i=1}^{m+n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i.$$

令 $\lambda_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \{\Delta S_i\}$, $\lambda_2 = \max_{m+1 \leq i \leq m+n} \{\Delta S_i\}$, $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, 则当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS.$$

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS$ 与二重积分有什么关系?

解 Σ 的方程为 $z=0, (x, y) \in D$,

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = dxdy,$$

故 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, z)dxdy.$

4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS$, 其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部

分, $f(x, y, z)$ 分别如下:

(1) $f(x, y, z)=1$;

解 $\Sigma: z=2-(x^2+y^2), D_{xy}: x^2+y^2\leq 2$,

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

因此
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} r dr = 2\pi \left[\frac{1}{12} (1+4r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3}\pi.$$

(2) $f(x, y, z)=x^2+y^2$;

解 $\Sigma: z=2-(x^2+y^2), D_{xy}: x^2+y^2\leq 2$,

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

因此
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1+4r^2} r dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+4r^2} r dr = \frac{149}{30}\pi.$$

(3) $f(x, y, z)=3z$.

解 $\Sigma: z=2-(x^2+y^2), D_{xy}: x^2+y^2\leq 2$,

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

因此
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{D_{xy}} 3[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\sqrt{1+4r^2} r dr = 6\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\sqrt{1+4r^2} r dr = \frac{111}{10}\pi.$$

5. 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2+y^2)dS$, 其中 Σ 是:

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

解 将 Σ 分解为 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 其中

$$\Sigma_1: z=1, D_1: x^2+y^2\leq 1, dS=dxdy;$$

$$\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}, D_2: x^2+y^2\leq 1, dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) dS \\
&= \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr + \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \pi .
\end{aligned}$$

提示: $dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy .$

(2) 锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的部分.

解 $\Sigma: z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}, D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 3,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = 2 dx dy ,$$

因而 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) 2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^2 2r dr = 9\pi .$

提示: $dS = \sqrt{1 + \left[\frac{6x}{2\sqrt{3}(x^2 + y^2)}\right]^2 + \left[\frac{6y}{2\sqrt{3}(x^2 + y^2)}\right]^2} dx dy = 2 dx dy .$

6. 计算下面对面积的曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一象限中的部分;

解 $\Sigma: z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y, D_{xy}: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 - \frac{3}{2}x,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy ,$$

$$\iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS = \iint_{D_{xy}} 4 \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \iint_{D_{xy}} dx dy = 4\sqrt{61} .$$

(2) $\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS$, 其中 Σ 为平面 $2x + 2y + z = 6$ 在第一象限中的部分;

解 $\Sigma: z = 6 - 2x - 2y, D_{xy}: 0 \leq y \leq 3 - x, 0 \leq x \leq 3,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = 3dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS = \iint_{D_{xy}} (2xy - 2x^2 - x + 6 - 2x - 2y) 3dxdy$$

$$= 3 \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (6 - 3x - 2x^2 + 2xy - 2y) dy = 3 \int_0^3 (3x^3 - 10x^2 + 9) dx = -\frac{27}{4}.$$

(3) $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上 $z \geq h$ ($0 < h < a$) 的部分;

解 $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \iint_{D_{xy}} (x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} a dxdy = a |D_{xy}| = \pi a (a^2 - h^2) \text{ (根据区域的对称性及函数的奇偶性).}$$

提示: $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$

(4) $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的有限部分.

解 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}, D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2ax, dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy,$

$$\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} [xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}] dxdy$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} [r^2 \sin\theta \cos\theta + r^2 (\cos\theta + \sin\theta)] r dr$$

$$= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta \cos^5\theta + \cos^5\theta + \sin\theta \cos^4\theta) d\theta = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

提示: $dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} dx dy.$

7. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 此壳的面密度为 $\mu = z$.

解 $\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

故 $M = \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} r^2 \sqrt{1 + r^2} r dr = \frac{2\pi}{15} (6\sqrt{3} + 1).$$

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$) 对于 z 轴的转动惯量.

解 $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

$$I_z = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \mu_0 dS = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \mu_0 \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$= a\mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - y^2}} dr = \frac{4}{3} \pi \mu_0 a^4.$$

提示: $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$

习题 10-5

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式:

$$\iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dydz = \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dydz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dydz.$$

解 证明把 Σ 分成 n 块小曲面 ΔS_i (ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积), ΔS_i 在 yOz 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$, (ξ_i, η_i, ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点, λ 是各小块曲面的直径的最大值, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dydz \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \pm P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] (\Delta S_i)_{yz} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \\ &= \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dydz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dydz. \end{aligned}$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$

与二重积分有什么关系?

解 因为 $\Sigma: z=0, (x, y) \in D_{xy}$, 故

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z) dx dy,$$

当 Σ 取的是上侧时为正号, Σ 取的是下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dx dy$ 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的下半部分的下侧;

解 Σ 的方程为 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq R$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dx dy &= - \iint_{D_{xy}} x^2 y^2 (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r dr \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r^5 dr = \frac{2}{105} \pi R^7.$$

(2) $\iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx$, 其中 z 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z=0$ 及

$z=3$ 所截得的第一卦限内的部分的前侧;

解 Σ 在 xOy 面的投影为零, 故 $\iint_{\Sigma} z dx dy = 0$.

Σ 可表示为 $x = \sqrt{1-y^2}$, $(y, z) \in D_{yz} = \{(y, z) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$, 故

$$\iint_{\Sigma} x dy dz = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2} dy dz = \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = 3 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$$

Σ 可表示为 $y = \sqrt{1-x^2}$, $(z, x) \in D_{zx} = \{(z, x) | 0 \leq z \leq 3, 0 \leq x \leq 1\}$, 故

$$\iint_{\Sigma} y dz dx = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1-x^2} dz dx = \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 3 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

因此 $\iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx = 2(3 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx) = 6 \times \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} \pi$.

解法二 Σ 前侧的法向量为 $\mathbf{n} = (2x, 2y, 0)$, 单位法向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, y, 0),$$

由两种曲面积分之间的关系,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx &= \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} (x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) dS = \iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dS = \iint_{\Sigma} dS = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

提示: $\iint_{\Sigma} dS$ 表示曲面的面积.

(3) $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$, 其中

$f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧;

解 曲面 Σ 可表示为 $z = 1 - x + y$, $(x, y) \in D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - 1\}$,

Σ 上侧的法向量为 $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$, 单位法向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

由两类曲面积分之间的联系可得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dydz + [2f(x, y, z) + y] dzdx + [f(x, y, z) + z] dxdy \\ &= \iint_{\Sigma} [(f+x)\cos \alpha + (2f+y)\cos \beta + (f+z)\cos \gamma] dS \\ &= \iint_{\Sigma} (f+x) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (2f+y) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (f+z) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x-y+z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} dxdy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(4) $\oiint_{\Sigma} xz dxdy + xy dydz + yz dzdx$, 其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$, 其中

$$\Sigma_1: x=0, D_{yz}: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-y,$$

$$\Sigma_2: y=0, D_{zx}: 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1-z,$$

$$\Sigma_3: z=0, D_{xy}: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x,$$

$$\Sigma_4: z=1-x-y, D_{xy}: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x,$$

于是
$$\oiint_{\Sigma} xz dxdy = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4} = 0 + 0 + 0 + \iint_{\Sigma_4} xz dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y) dxdy = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \frac{1}{24}.$$

由积分变元的轮换对称性可知

$$\oiint_{\Sigma} xy dydz = \oiint_{\Sigma} yz dzdx = \frac{1}{24}.$$

因此
$$\oiint_{\Sigma} xz dxdy + xy dydz + yz dzdx = 3 \times \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

解 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$, 其中 Σ_1 、 Σ_2 、 Σ_3 是位于坐标面上的三块;

Σ_4 : $z = 1 - x - y$, D_{xy} : $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$.

显然在 Σ_1 、 Σ_2 、 Σ_3 上的曲面积分均为零, 于是

$$\begin{aligned} & \oiint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx \\ &= \iint_{\Sigma_4} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx \\ &= \iint_{\Sigma_4} (xy \cos \alpha + yz \cos \beta + xz \cos \gamma) dS \\ &= \sqrt{3} \iint_{\Sigma_4} (xy + yz + xz) dS = 3 \iint_{D_{xy}} [xy + (x+y)(1-x-y)] dx dy = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. 把对坐标的曲面积分

$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$ 化成对面积的曲面积分:

(1) Σ 为平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 在第一卦限的部分的上侧;

解 令 $F(x, y, z) = 3x + 2y + 2\sqrt{3}z - 6$, Σ 上侧的法向量为:

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (3, 2, 2\sqrt{3}),$$

单位法向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{5}(3, 2, 2\sqrt{3}),$$

于是

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{1}{5} (3P + 2Q + 2\sqrt{3}R) dS. \end{aligned}$$

(2) Σ 是抛物面 $z = 8 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 令 $F(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 8$, Σ 上侧的法向量

$$n=(F_x, F_y, F_z)=(2x, 2y, 1),$$

单位法向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x, 2y, 1),$$

于是

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \\ &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} (2xP + 2yQ + R) dS. \end{aligned}$$

10-6

1. 利用高斯公式计算曲面积分:

(1) $\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 Σ 为平面 $x=0, y=0, z=0, x=a,$

$y=a, z=a$ 所围成的立体的表面的外侧;

解 由高斯公式

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) dv \\ &= 6 \iiint_{\Omega} x dv = 6 \int_0^a x dx \int_0^a dy \int_0^a dz = 3a^4 \text{ (这里用了对称性).}\end{aligned}$$

(2) $\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧;

解 由高斯公式

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dv \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr = \frac{12}{5} \pi a^5.\end{aligned}$$

(3) $\oiint_{\Sigma} xz^2 dydz + (x^2y - z^3) dzdx + (2xy + y^2z) dxdy$, 其中 Σ 为上半球体

$x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的表面外侧;

解 由高斯公式

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 + y^2) dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 r^2 \sin \varphi dr = \frac{2}{5} \pi a^5.\end{aligned}$$

(4) $\oiint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy$ 其中 Σ 介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体

$x^2 + y^2 \leq 9$ 的整个表面的外侧;

解 由高斯公式

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} 3dv = 81\pi.$$

$$(5) \oiint_{\Sigma} 4xzdydz - y^2dzdx + yzdx dy, \text{其中}\Sigma\text{为平面 } x=0, y=0, z=0, x=1,$$

$y=1, z=1$ 所围成的立体的全表面的外侧.

解 由高斯公式

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} (4z - 2y + y) dv \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (4z - y) dz = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. 求下列向量 A 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量:

(1) $A = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, Σ 为圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的全表面, 流向外侧;

解 $P = yz, Q = xz, R = xy$,

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_{\Sigma} yzdydz + xzdzdx + xydx dy \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0. \end{aligned}$$

(2) $A = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$, Σ 为立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$,

的全表面, 流向外侧;

解 $P = 2x - z, Q = x^2y, R = -xz^2$,

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} (2 + x^2 - 2xz) dv \\ &= \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (2 + x^2 - 2xz) dz = a^3 \left(2 - \frac{a^2}{6} \right). \end{aligned}$$

(3) $A = (2x + 3z)\mathbf{i} - (xz + y)\mathbf{j} + (y^2 + 2z)\mathbf{k}$, Σ 是以点 $(3, -1, 2)$ 为球心,

半径 $R = 3$ 的球面, 流向外侧.

解 $P = 2x + 3z, Q = -(xz + y), R = y^2 + 2z$,

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} (2-1+2) dv = \iiint_{\Omega} 3 dv = 108\pi.$$

3. 求下列向量 A 的散度:

$$(1) A = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + xz)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k};$$

$$\text{解 } P = x^2 + yz, Q = y^2 + xz, R = z^2 + xy,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z).$$

$$(2) A = e^{xy}\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j} + \cos(xz^2)\mathbf{k};$$

$$\text{解 } P = e^{xy}, Q = \cos(xy), R = \cos(xz^2),$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ye^{xy} - x \sin xy - 2xz \sin(xz^2).$$

$$(3) A = y^2 z \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + xz \mathbf{k};$$

$$\text{解 } P = y^2, Q = xy, R = xz,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + x + x = 2x.$$

4. 设 $u(x, y, z)$ 、 $v(x, y, z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x, y, z)$ 、 $v(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数. 证明

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, dx dy dz = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

其中 Σ 是空间闭区间 Ω 的整个边界曲面, 这个公式叫作格林第二公式.

证明 由第一格林公式(见书中例 3)知

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) dx dy dz \\ &= \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz, \\ & \iiint_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

$$= \oint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

将上面两个式子相减, 即得

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left[u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] dx dy dz \\ &= \oint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \end{aligned}$$

5. 利用高斯公式推证阿基米德原理: 浸没在液体中所受液体的压力的合力(即浮力)的方向铅直向上, 大小等于这物体所排开的液体的重力.

证明 取液面为 xOy 面, z 轴沿铅直向下, 设液体的密度为 ρ , 在物体表面 Σ 上取元素 dS 上一点, 并设 Σ 在点 (x, y, z) 处的外法线的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 则 dS 所受液体的压力在坐标轴 x, y, z 上的分量分别为

$$-\rho z \cos \alpha dS, -\rho z \cos \beta dS, -\rho z \cos \gamma dS,$$

Σ 所受的压力利用高斯公式进行计算得

$$\begin{aligned} F_x &= \oint_{\Sigma} -\rho z \cos \alpha dS = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0, \\ F_y &= \oint_{\Sigma} -\rho z \cos \beta dS = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0, \\ F_z &= \oint_{\Sigma} -\rho z \cos \gamma dS = \iiint_{\Omega} -\rho dv = -\rho \iiint_{\Omega} dv = -\rho |\Omega|, \end{aligned}$$

其中 $|\Omega|$ 为物体的体积. 因此在液体中的物体所受液体的压力的合力, 其方向铅直向上, 大小等于这物体所排开的液体所受的重力, 即阿基米德原理得证.

习题 10-7

1. 利用斯托克斯公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 若从 z 轴

的正向看去, 这圆周取逆时针方向;

解 设 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 上 Γ 所围成的部分, 则 Σ 上侧的单位法向量为

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\text{于是 } \oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint_{\Sigma} (-\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma) dS = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

提示: $\iint_{\Sigma} dS$ 表示 Σ 的面积, Σ 是半径为 a 的圆.

(2) $\oint_{\Gamma} (y-z)dz + (z-x)dy + (x-y)dx$, 其中 Γ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$

($a>0, b>0$), 若从 x 轴正向看去, 这椭圆取逆时针方向;

解 设 Σ 为平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ 上 Γ 所围成的部分, 则 Σ 上侧的单位法向量为

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

$$\text{于是 } \oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint_{\Sigma} (-2\cos\alpha - 2\cos\beta - 2\cos\gamma) dS = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{\Sigma} dS$$

$$= \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} dx dy = \frac{-2(a+b)}{a} \iint_{D_{xy}} dx dy = -2\pi a(a+b).$$

提示: Σ (即 $z=b-\frac{b}{a}x$) 的面积元素为 $dS=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy$.

(3) $\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2=2z, z=2$, 若从 z 轴的

正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

解 设 Σ 为平面 $z=2$ 上 Γ 所围成的部分的上侧, 则

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} \\ &= \iint_{\Sigma} (z^2+x)dydz - (z+3)dxdy = -5\pi \times 2^2 = -20\pi.\end{aligned}$$

(4) $\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=9, z=0$, 若从 z 轴

的正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

解 设 Σ 为 xOy 面上的圆 $x^2+y^2 \leq 9$ 的上侧, 则

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} \\ &= \iint_{\Sigma} dxdy = \iint_{D_{xy}} dxdy = 9\pi.\end{aligned}$$

2. 求下列向量场 A 的旋度:

(1) $A=(2z-3y)\mathbf{i}+(3x-z)\mathbf{j}+(-2x)\mathbf{k}$;

$$\text{解 } \text{rot} A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

(2) $A=(\sin y)\mathbf{i}-(z-x\cos y)\mathbf{k}$;

$$\text{解 } \text{rot} A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

$$(3) \mathbf{A} = x^2 \sin y \mathbf{i} + y^2 \sin(xz) \mathbf{j} + x y \sin(\cos z) \mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 \sin y & y^2 \sin(xz) & x y \sin(\cos z) \end{vmatrix} \\ &= [x \sin(\cos z) - x y^2 \cos(xz)] \mathbf{i} - y \sin(\cos z) \mathbf{j} + [y^2 z \cos(xz) - x^2 \cos y] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

3. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ 化为曲线积分, 并计算积分值,

其中 \mathbf{A} 、 Σ 及 \mathbf{n} 分别如下:

(1) $\mathbf{A} = y^2 \mathbf{i} + x y \mathbf{j} + x z \mathbf{k}$, Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 的上侧, \mathbf{n} 是 Σ 的单位法向量;

解 设 Σ 的边界 $\Gamma: x^2 + y^2 = 1, z = 0$, 取逆时针方向, 其参数方程为

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 0 (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

由托斯公式

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} y^2 dx + x y dy + x z dz \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin^2 \theta (-\sin \theta) + \cos^2 \theta \sin \theta] d\theta = 0. \end{aligned}$$

(2) $\mathbf{A} = (y - z) \mathbf{i} + y z \mathbf{j} - x z \mathbf{k}$, Σ 为立方体 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面, \mathbf{n} 是 Σ 的单位法向量.

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\ &= \oint_{\Gamma} (y - x) dx + y z dy + (-x z) dz = \oint_{\Gamma} y dx = \int_2^0 2 dx = -4. \end{aligned}$$

4. 求下列向量场 \mathbf{A} 沿闭曲线 Γ (从 z 轴正向看依逆时针方向) 的环流量:

(1) $\mathbf{A} = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + c \mathbf{k}$ (c 为常量), Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$;

$$\begin{aligned} \text{解 } \oint_L -y dx + x dy + c dz &= \int_0^{2\pi} [(-\sin \theta)((-\sin \theta) + \cos \theta \cos \theta)] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

(2) $\mathbf{A} = (x - z) \mathbf{i} + (x^3 + y z) \mathbf{j} - 3xy^2 \mathbf{k}$, 其中 Γ 为圆周 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$.

解 有向闭曲线 Γ 的参数方程为 $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta, z=0(0\leq\theta\leq 2\pi)$.

向量场 \mathbf{A} 沿闭曲线 Γ 的环流量为

$$\begin{aligned}\oint_L Pdx+Qdy+Rdz &= \oint_L (x-z)dx+(x^2+yz)dy-3xy^2dz \\ &= \int_0^{2\pi} [2\cos\theta(-2\sin\theta)+8\cos^3\theta 2\cos\theta]d\theta = 12\pi.\end{aligned}$$

5. 证明 $\mathbf{rot}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{rot}\mathbf{a}+\mathbf{rot}\mathbf{b}$.

解 令 $\mathbf{a}=P_1(x, y, z)\mathbf{i}+Q_1(x, y, z)\mathbf{j}+R_1(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\mathbf{b}=P_2(x, y, z)\mathbf{i}+Q_2(x, y, z)\mathbf{j}+R_2(x, y, z)\mathbf{k},$$

由行列式的性质, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1+P_2 & Q_1+Q_2 & R_1+R_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} = \mathbf{rot}\mathbf{a}+\mathbf{rot}\mathbf{b}.\end{aligned}$$

6. 设 $u=u(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\mathbf{u})$

解 因为 $\mathbf{grad}\mathbf{u}=u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}+u_z\mathbf{k}$, 故

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = (u_{zy}-u_{yz})\mathbf{i}+(u_{zx}-u_{xz})\mathbf{j}+(u_{yx}-u_{xy})\mathbf{k}=0.$$

*7. 证明:

$$(1) \nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \nabla(uv) &= \frac{\partial(uv)}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial(uv)}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\ &= v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right)=u\nabla v+v\nabla u.\end{aligned}$$

$$(2) \Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \Delta(uv) &= \frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2} = u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\right) = u \Delta v + v \Delta u + 2 \nabla u \cdot \nabla v.\end{aligned}$$

$$(3) \nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$$

$$\text{解 } B = P_2 i + Q_2 j + R_2 k,$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (A \times B) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial(Q_1 R_2 - Q_2 R_1)}{\partial x} - \frac{\partial(P_1 R_2 - P_2 R_1)}{\partial y} + \frac{\partial(P_1 Q_2 - P_2 Q_1)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial Q_1}{\partial x} R_2 + Q_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial Q_2}{\partial x} R_1 - Q_2 \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial x} R_2 - P_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial P_2}{\partial y} R_1 + P_2 \frac{\partial R_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} Q_2 + P_1 \frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial P_2}{\partial z} Q_1 - P_2 \frac{\partial Q_1}{\partial z} \\ &= R_2 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial z} \right) + R_1 \left(\frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial x} \right) \\ &\quad + Q_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) + P_1 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial y} \right) + P_2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{而 } B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B) &= \begin{vmatrix} P_2 & Q_2 & R_2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} \\ &= P_2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) + R_2 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) \\ &\quad - P_1 \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x} \right) - R_1 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$\text{所以 } \nabla \times (A \times B) = B \times (\nabla \times A) - A \times (\nabla \times B)$$

$$(4) \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

$$\text{解 } \text{令 } A = P i + Q j + R k, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times A &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k \\
\text{从而 } \nabla \times (\nabla \times A) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial^2 y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) i + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) j \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \right) k \\
&= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) i - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) i \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} \right) j - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) j \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) k - \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) k \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot A) i + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot A) j + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot A) k \right] \\
&\quad - [\nabla^2 P i + \nabla^2 Q j + \nabla^2 R k] = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A
\end{aligned}$$

命题地证

总习题十

1. 填空:

(1) 第二类曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 化成第一类曲线积分是_____, 其中 α 、 β 、 γ 为有向曲线弧 Γ 上点 (x, y, z) 处的_____的方向角.

解 $\int_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$, 切向量.

(2) 第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rxdy$ 化成第一类曲面积分是_____, 其中 α 、 β 、 γ 为有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的_____的方向角.

解 $\iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$, 法向量.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设曲面 Σ 是上半球面: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$, 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分, 则有_____.

$$(A) \iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS; (B) \iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS;$$

$$(C) \iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS; (D) \iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS.$$

解 (C).

3. 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$;

解 L 的参数方程为 $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \theta$, $y = \frac{a}{2} \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), 故

$$\begin{aligned} \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \oint_L \sqrt{ax} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{ax(\theta)} \cdot \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos \theta)} \cdot d\theta = \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} |2 \cos \frac{\theta}{2}| d\theta \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi} |\cos t| dt = a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t dt \right) = 2a^2 \text{ (这里令 } t = \frac{\theta}{2} \text{)}. \end{aligned}$$

(2) $\int_{\Gamma} z ds$, 其中 Γ 为曲线 $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ ($0 \leq t \leq t_0$);

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_{\Gamma} z ds &= \int_0^{t_0} t \cdot \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{t_0} \sqrt{2+t^2} dt = \frac{\sqrt{(2+t_0^2)^3} - 2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

(3) $\int_L (2a-y)dx + xdy$, 其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧;

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_L (2a-y)dx + xdy &= \int_0^{2\pi} [(2a-a+a\cos t) \cdot a(1-\cos t) + a(t-\sin t) \cdot a\sin t] dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = -2\pi a^2.\end{aligned}$$

(4) $\int_{\Gamma} (y^2-z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, 其中 Γ 是曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上由 $t_1=0$ 到 $t_2=1$ 的一段弧;

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_{\Gamma} (y^2-z^2)dx + 2yzdy - x^2dz &= \int_0^1 [(t^4-t^6) \cdot 1 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2] dt \\ &= \int_0^1 (-2t^4 + 3t^6) dt = \frac{1}{35}.\end{aligned}$$

(5) $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$, 其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$, 沿逆时针方向;

$$\text{解 这里 } P=e^x \sin y - 2y, Q=e^x \cos y - 2, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - e^x \cos y + 2 = 2.$$

令 L_1 为 x 轴上由原点到 $(2a, 0)$ 点的有向直线段, D 为 L 和 L_1 所围成的区域, 则由格林公式

$$\begin{aligned}\oint_{L+L_1} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2 \iint_D dx dy = \pi a^2, \\ \int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy &= \pi a^2 - \int_{L_1} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy \\ &= \pi a^2 - \int_0^{2a} 0 dx = \pi a^2.\end{aligned}$$

(6) $\oint_{\Gamma} xyz dz$, 其中 Γ 是用平面 $y=z$ 截球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所得的截痕, 从 z 轴的正向看去, 沿逆时针方向.

解 曲线 Γ 的一般方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=z \end{cases}$, 其参数方程为

$$x=\cos t, y=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin t, z=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

于是
$$\oint_{\Gamma} xyz dz = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cos t \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cos t \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cos t dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{16} \pi.$$

4. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 Σ 是界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$;

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 其中

$$\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}, D_{xy}: -R \leq y \leq R, 0 \leq z \leq H, dS = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dy dz;$$

$$\Sigma_2: x=-\sqrt{R^2-y^2}, D_{xy}: -R \leq y \leq R, 0 \leq z \leq H, dS = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dy dz,$$

于是
$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} + \iint_{\Sigma_2} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= 2 \iint_{D_{xy}} \frac{1}{R^2+z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dy dz = 2R \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}} dy \int_0^H \frac{1}{R^2+z^2} dz$$

$$= 2\pi \arctan \frac{H}{R}.$$

(2) $\iint_{\Sigma} (y^2-z) dy dz + (z^2-x) dz dx + (x^2-y) dx dy$, 其中 Σ 为锥面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ ($0 \leq z \leq h$) 的外侧;

解 这里 $P=y^2-z, Q=z^2-x, R=x^2-y, \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

设 Σ_1 为 $z=h$ ($x^2+y^2 \leq h^2$) 的上侧, Ω 为由 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域, 则由高斯公式

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} (y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = 0,$$

而
$$\iint_{\Sigma_1} (y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy = \iint_{\Sigma_1} (x^2-y)dxdy$$

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2-y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h (r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta) dr = \frac{\pi}{4} h^4,$$

所以
$$\iint_{\Sigma} (y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy = -\frac{\pi}{4} h^4.$$

(3) $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, 其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧;

解 设 Σ_1 为 xOy 面上圆域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 的下侧, Ω 为由 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域, 则由高斯公式得

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv \\ &= \iiint_{\Omega} 3dv = 3\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) = 2\pi R^3, \end{aligned}$$

而
$$\iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_{\Sigma_1} zdxdy = \iint_{D_{xy}} 0dxdy = 0 = 0,$$

所以
$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 2\pi R^3 - 0 = 2\pi R^3.$$

(4) $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, 其中 Σ 为曲面 $1 - \frac{z}{5} = \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9}$ ($z \geq 0$) 的上侧;

解 这里 $P = \frac{x}{r^3}$, $Q = \frac{y}{r^3}$, $R = \frac{z}{r^3}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3xy^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3xz^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0.$$

设 Σ_1 为 $z=0$ ($\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} \leq 1$) 的下侧, Ω 是由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间区域, 则由高斯公

式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{xdydz+yzdxdx+zdx dy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = 0,$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{xdydz+yzdxdx+zdx dy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} &= - \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz+yzdxdx+zdx dy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{0}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} dxdy = 0. \end{aligned}$$

(5) $\iint_{\Sigma} xyz dxdy$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 的外侧.

解 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, 其中

Σ_1 是 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ($x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$) 的上侧;

Σ_2 是 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ ($x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$) 的下侧,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xyz dxdy &= \iint_{\Sigma_1} xyz dxdy + \iint_{\Sigma_2} xyz dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dxdy - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) dxdy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dxdy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \rho^3 d\rho \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho^3 d\rho = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

5. 证明 $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数

的全微分, 并求出一个这样的二元函数.

解 这里 $P = \frac{x}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{y}{x^2+y^2}$. 显然, 区域 G 是单连通的, P 和 Q 在 G 内具有一阶

连续偏导数, 并且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在开区域 G 内是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分.

$$u(x, y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \int_1^x \frac{1}{x} dx + \int_0^y \frac{y}{x^2+y^2} dy = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + C.$$

6. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $F = -\frac{k}{\rho^3}(xi+yj)$ 构成力场, 其中 k 为常数, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

解 场力沿路径 L 所作的功为

$$W = \int_L -\frac{kx}{\rho^3} dx - \frac{ky}{\rho^3} dy.$$

令 $P = -\frac{kx}{\rho^3}$, $Q = -\frac{ky}{\rho^3}$. 因为 P 和 Q 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续的偏导数, 并

且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3k}{\rho^5} xy = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以上述曲线积分所路径无关, 即力场所作的功与路径无关.

7. 求均匀曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的质心的坐标.

解 这里 $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

设曲面 Σ 的面密度为 $\rho=1$, 由曲面的对称性可知, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 因为

$$\iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = a \iint_{D_{xy}} dx dy = \pi a^3,$$

$$\iint_{\Sigma} dS = \frac{1}{2} \cdot 4\pi a^2 = 2\pi a^2,$$

所以 $\bar{z} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}.$

因此该曲面的质心为 $(0, 0, \frac{a}{2})$.

8. 设 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数, 分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明:

$$(1) \iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D (\mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v) dx dy + \int_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds;$$

$$(2) \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_L (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) ds,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u 、 v 沿 L 的外法线向量 \mathbf{n} 的方向导数, 符号 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为二维拉普拉斯算子.

证明 设 L 上的单位切向量为 $\mathbf{T} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, 则 $\mathbf{n} = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$.

$$\begin{aligned} (1) \int_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \int_L v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha \right) ds = \int_L \left[-v \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + v \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha \right] ds \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \iint_D v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= \iint_D \mathbf{grad} v \cdot \mathbf{grad} u dx dy + \iint_D v \Delta u dx dy, \end{aligned}$$

所以 $\iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D (\mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v) dx dy + \int_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds.$

$$\begin{aligned}
(2) \int_L (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) ds &= \int_L [u(\frac{\partial v}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial v}{\partial y} \cos \alpha) - v(\frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha)] dx dy \\
&= \int_L [(-u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y}) \cos \alpha + (u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}) \sin \alpha] dx dy \\
&= \iint_D [\frac{\partial}{\partial x} (u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (-u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y})] dx dy \\
&= \iint_D (\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) dx dy \\
&= \iint_D [u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) - v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})] dx dy = \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy.
\end{aligned}$$

9. 求向量 $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解 设 Σ 为区域 Ω 的边界曲面的外侧, 则通量为

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dv \\
&= \iiint_{\Omega} 3 dv = 3.
\end{aligned}$$

10. 求力 $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功, 其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 从 z 轴正向看去, 沿顺时针方向.

解 设 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦部分的下侧, 则力场沿其边界 L (顺时针方向) 所作的功为

$$W = \oint_L y dx + z dy + x dz.$$

曲面 Σ 的单位法向量为 $\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 由斯托克斯公式有

$$\begin{aligned}
W &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (-1-1-1) dS = \sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

习题 11-1

1. 写出下列级数的前五项:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2};$$

$$\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} = \frac{1+1}{1+1^2} + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \frac{1+5}{1+5^2} + \cdots.$$

$$\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} = 1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{26} + \frac{6}{37} + \cdots.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n};$$

$$\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \cdots.$$

$$\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{15}{48} + \frac{105}{384} + \frac{945}{3840} + \cdots.$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n};$$

$$\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots.$$

$$\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625} + \frac{1}{3125} - \cdots.$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

$$\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \frac{5!}{5^5} + \cdots.$$

$$\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{1} + \frac{2}{4} + \frac{6}{27} + \frac{24}{256} + \frac{120}{3125} + \cdots.$$

2. 写出下列级数的一般项:

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots;$$

解 一般项为 $u_n = \frac{1}{2n-1}$.

$$(2) \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots;$$

解 一般项为 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$.

$$(3) \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4} + \frac{x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots;$$

解 一般项为 $u_n = \frac{x^{\frac{n}{2}}}{2n!}$.

$$(4) \frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{5} + \frac{a^4}{7} - \frac{a^5}{9} + \cdots.$$

解 一般项为 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{a^{n+1}}{2n+1}$.

3. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

解 因为

$$\begin{aligned} s_n &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以级数发散.

$$(2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots;$$

解 因为

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2} (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以级数收敛.

$$(3) \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{6} + \cdots \sin \frac{n\pi}{6} + \cdots .$$

$$\begin{aligned} \text{解 } s_n &= \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{6} + \cdots \sin \frac{n\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}} (2\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{6} + 2\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{2\pi}{6} + \cdots + 2\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{n\pi}{6}) \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}} [(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{3\pi}{12}) + (\cos \frac{3\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}) + \cdots + (\cos \frac{2n-1}{12}\pi - \cos \frac{2n+1}{12}\pi)] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}} (\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{2n+1}{12}\pi). \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{2n+1}{12}\pi$ 不存在, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在, 因而该级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) -\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots + (-1)^n \frac{8^n}{9^n} + \cdots ;$$

解 这是一个等比级数, 公比为 $q = -\frac{8}{9}$, 于是 $|q| = \frac{8}{9} < 1$, 所以此级数收敛.

$$(2) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots ;$$

解 此级数是发散的, 这是因为如此级数收敛, 则级数

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 3(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots)$$

也收敛, 矛盾.

$$(3) \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \cdots ;$$

解 因为级数的一般项 $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{3}} = 3^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \neq 0 (n \rightarrow \infty)$,

所以由级数收敛的必要条件可知, 此级数发散.

$$(4) \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \cdots + \frac{3^n}{2^n} + \cdots ;$$

解 这是一个等比级数, 公比 $q = \frac{3}{2} > 1$, 所以此级数发散.

$$(5) (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}) + \cdots + (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) + \cdots .$$

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 都是收敛的等比级数, 所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \cdots$$

是收敛的.

习题 11-2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)} + \cdots ;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故所给级数发散.

$$(2) 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots ;$$

解 因为 $u_n = \frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n}{n+n^2} = \frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

$$(3) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots ;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+5n+4} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

故所给级数收敛.

$$(4) \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \sin \frac{\pi}{2^3} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \cdots ;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = \pi$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛,

故所给级数收敛.

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} (a > 0).$$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = l = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} & a = 1 \\ 1 & a > 1 \end{cases},$$

而当 $a > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 收敛, 当 $0 < a \leq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 发散,

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 当 $a > 1$ 时收敛, 当 $0 < a \leq 1$ 时发散.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{3^n}{n \cdot 2^n} + \cdots ;$$

解 级数的一般项为 $u_n = \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{3}{2} > 1,$$

所以级数发散.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1,$

所以级数收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1,$

所以级数收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1,$

所以级数收敛.

3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, 所以级数收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n};$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$, 所以级数收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1};$$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(3-\frac{1}{n}\right)^{2-\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{2-\frac{1}{n}} \cdot \left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3^2 \cdot e^3} < 1, \end{aligned}$$

所以级数收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n, \text{ 其中 } a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty), a_n, b, a \text{ 均为正数.}$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$,

所以当 $b < a$ 时级数收敛, 当 $b > a$ 时级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots;$$

解 这里 $u_n = n\left(\frac{3}{4}\right)^n$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1,$$

所以级数收敛.

$$(2) \frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \cdots + \frac{n^4}{n!} + \cdots ;$$

解 这里 $u_n = \frac{n^4}{n!}$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 0 < 1,$$

所以级数收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} ;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n(n+2)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} ;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \sin \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \cdot \frac{\pi}{3^n}} = \frac{2}{3} < 1$,

所以级数收敛.

$$(5) \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \cdots ;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1 \neq 0$,

所以级数发散.

$$(6) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} + \cdots (a > 0, b > 0).$$

解 因为 $u_n = \frac{1}{na+b} > \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

5. 判定下列级数是否收敛? 如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots;$$

解 这是一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, 其中 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

因为显然 $u_n \geq u_{n+1}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以此级数是收敛的.

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是 $p < 1$ 的 p 级数, 是发散的,

所以原级数是条件收敛的.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}};$$

解 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n}{3^{n-1}}} = \frac{1}{3} < 1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$ 是收敛的,

从而原级数收敛, 并且绝对收敛.

$$(3) \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots;$$

解 这是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$.

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$ 是收敛的, 所以原级数也收敛, 并且绝对收敛.

$$(4) \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots;$$

解 这是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$, 其中 $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$.

因为 $u_n \geq u_{n+1}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以此级数是收敛的.

又因为 $\frac{1}{\ln(n+1)} \geq \frac{1}{n+1}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散, 从而原级数是条件收敛的.

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}.$$

解 级数的一般项为 $u_n = (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n)}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} \cdot \frac{2^n}{n-1} \cdot \frac{2^n}{n-2} \cdots \frac{2^n}{3} \cdot \frac{2^n}{2} \cdot \frac{2^n}{1} = \infty$,
所以级数发散.

习题 11-3

1. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故收敛半径为 $R=1$.

因为当 $x=1$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 是发散的;

当 $x=-1$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, 也是发散的,

所以收敛域为 $(-1, 1)$.

(2) $1-x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n \frac{x^n}{n^2}+\cdots$;

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, 故收敛半径为 $R=1$.

因为当 $x=1$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$, 是收敛的; 当 $x=-1$ 时, 幂级数成为 $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

也是收敛的, 所以收敛域为 $[-1, 1]$.

(3) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2 \cdot 4}+\frac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6}+\cdots+\frac{x^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}+\cdots$;

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, 故收敛半径为 $R=+\infty$, 收敛域为

$(-\infty, +\infty)$.

(4) $\frac{x}{1 \cdot 3}+\frac{x^2}{2 \cdot 3^2}+\frac{x^3}{3 \cdot 3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n \cdot 3^n}+\cdots$;

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}$, 故收敛半径为 $R=3$.

因为当 $x=3$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 是发散的; 当 $x=-3$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, 也是

收敛的, 所以收敛域为 $[-3, 3)$.

$$(5) \frac{2}{2}x + \frac{2^2}{5}x^2 + \frac{2^3}{10}x^3 + \cdots + \frac{2^n}{n^2+1}x^n + \cdots;$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 2, \text{ 故收敛半径为 } R = \frac{1}{2}.$$

因为当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, 是收敛的; 当 $x = -1$ 时, 幂级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}, \text{ 也是收敛的, 所以收敛域为 } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$\text{解 这里级数的一般项为 } u_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{x^{2n+1}} \right| = x^2, \text{ 由比值审敛法, 当 } x^2 < 1, \text{ 即 } |x| < 1 \text{ 时, 幂级数}$$

绝对收敛; 当 $x^2 > 1$, 即 $|x| > 1$ 时, 幂级数发散, 故收敛半径为 $R=1$.

$$\text{因为当 } x=1 \text{ 时, 幂级数成为 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}, \text{ 是收敛的; 当 } x=-1 \text{ 时, 幂级数成为}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}, \text{ 也是收敛的, 所以收敛域为 } [-1, 1].$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2};$$

$$\text{解 这里级数的一般项为 } u_n = \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}.$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}} \right| = \frac{1}{2} x^2, \text{ 由比值审敛法, 当 } \frac{1}{2} x^2 < 1, \text{ 即}$$

$|x| < \sqrt{2}$ 时, 幂级数绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} x^2 > 1$, 即 $|x| > \sqrt{2}$ 时, 幂级数发散, 故收敛半径为

$$R=\sqrt{2}.$$

因为当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$, 是发散的, 所以收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}.$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$, 故收敛半径为 $R=1$, 即当 $-1 < x-5 < 1$ 时级数收敛, 当

$|x-5| > 1$ 时级数发散.

因为当 $x-5=-1$, 即 $x=4$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 是收敛的; 当 $x-5=1$, 即 $x=6$ 时, 幂

级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, 是发散的, 所以收敛域为 $[4, 6)$.

2. 利用逐项求导或逐项积分, 求下列级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1};$$

解 设和函数为 $S(x)$, 即 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则

$$\begin{aligned} S(x) &= \left[\int_0^x S(x) dx \right]' = \left[\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} dx \right]' = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx \right]' \\ &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right]' = \left[\frac{1}{1-x} - 1 \right]' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1};$$

解 设和函数为 $S(x)$, 即 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, 则

$$\begin{aligned}
S(x) &= S(0) + \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right]' dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} dx \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{1-x^4} - 1 \right) dx = \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x \quad (-1 < x < 1).
\end{aligned}$$

提示: 由 $\int_0^x S'(x) dx = S(x) - S(0)$ 得 $S(x) = S(0) + \int_0^x S'(x) dx$.

$$(3) \quad x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots.$$

解 设和函数为 $S(x)$, 即

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots,$$

则
$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right]' dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

提示: 由 $\int_0^x S'(x) dx = S(x) - S(0)$ 得 $S(x) = S(0) + \int_0^x S'(x) dx$.

习题 11-4

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数, 并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

$$\text{解 } f^{(n)}(x)=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$f^{(n)}(x_0)=\cos(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2}) \quad (n=1, 2, \cdots),$$

从而得 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x_0 + \cos(x_0 + \frac{\pi}{2})(x-x_0) + \frac{\cos(x_0 + \pi)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\cos(x_0 + \frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x). \end{aligned}$$

$$\text{因为 } |R_n(x)| = \left| \frac{\cos[x_0 + \theta(x-x_0) + \frac{n+1}{2}\pi]}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0 \leq \theta \leq 1),$$

而级数 $\sum_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ 总是收敛的, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$.

$$\begin{aligned} \text{因此 } f(x) &= \cos x_0 + \cos(x_0 + \frac{\pi}{2})(x-x_0) + \frac{\cos(x_0 + \pi)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\cos(x_0 + \frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

$$(1) \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

解 因为

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\text{所以 } e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\text{故 } \operatorname{sh} x = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n] \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) $\ln(a+x)$ ($a>0$);

解 因为 $\ln(a+x) = \ln a \ln(1+\frac{x}{a}) = \ln a + \ln(1+\frac{x}{a})$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1),$$

所以 $\ln(a+x) = \ln a + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} (\frac{x}{a})^{n+1} = \ln a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}} \quad (-a < x \leq a).$

(3) a^x ;

解 因为 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

所以 $a^x = e^{x \ln a} = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

(4) $\sin^2 x$;

解 因为 $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

所以 $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in (-\infty, +\infty).$

(5) $(1+x)\ln(1+x)$;

解 因为 $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1)$,

所以 $(1+x)\ln(1+x) = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n}$$
$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] x^{n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1} \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$(6) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{解 因为 } \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$\text{所以 } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot (2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

$$(1) \sqrt{x^3};$$

解 因为

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1).$$

$$\text{所以 } \sqrt{x^3} = [1 + (x-1)]^{\frac{3}{2}}$$

$$= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1) \cdots (\frac{3}{2}-n+1)}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

$$(-1 < x-1 < 1),$$

$$\text{即 } \sqrt{x^3} = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3 \cdot 1}{2^2 \cdot 2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdots (5-2n)}{2^n \cdot n!}(x-1)^n + \cdots$$

$$(0 < x < 2).$$

上术级数当 $x=0$ 和 $x=2$ 时都是收敛的, 所以展开式成立的区间是 $[0, 2]$.

$$(2) \lg x.$$

$$\text{解 } \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln[1 + (x-1)] = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad (-1 < x-1 \leq 1),$$

$$\text{即 } \lg x = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad (0 < x \leq 2).$$

4. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 $(x + \frac{\pi}{3})$ 的幂级数.

$$\text{解 } \cos x = \cos[(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{3}] = \cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi}{3} + \sin(x + \frac{\pi}{3}) \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} \right] \quad (-\infty < x < +\infty).
\end{aligned}$$

5. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

$$\text{解 } \frac{1}{x} = \frac{1}{3+x-3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{3}\right)^n \quad \left(-1 < \frac{x-3}{3} < 1\right),$$

$$\text{即 } \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{3}\right)^n \quad (0 < x < 6).$$

6. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

$$\text{解 } f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

$$\text{而 } \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-3+(x+4)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x+4}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x+4}{3}\right| < 1\right),$$

$$\text{即 } \frac{1}{x+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}} \quad (-7 < x < -1);$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+(x+4)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x+4}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n \quad \left(\left|\frac{x+4}{2}\right| < 1\right),$$

$$\text{即 } \frac{1}{x+2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n+1}} \quad (-6 < x < -2).$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n \quad (-6 < x < -2).$$

习题 11-5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

(1) $\ln 3$ (误差不超过 0.0001);

$$\text{解 } \ln \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} + \cdots) \quad (-1 < x < 1),$$

$$\ln 3 = \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} + \cdots).$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |r_n| &= 2[\frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}} + \frac{1}{(2n+3) \cdot 2^{2n+3}} + \cdots] \\ &= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}} [1 + \frac{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}{(2n+3) \cdot 2^{2n+3}} + \frac{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}{(2n+5) \cdot 2^{2n+5}} + \cdots] \\ &< \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}} (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots) = \frac{1}{3(2n-1)2^{2n-2}}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } |r_5| < \frac{1}{3 \cdot 11 \cdot 2^8} \approx 0.00012, \quad |r_5| < \frac{1}{3 \cdot 13 \cdot 2^{10}} \approx 0.00003.$$

因而取 $n=6$, 此时

$$\ln 3 = 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{11}}) \approx 1.0986.$$

(2) \sqrt{e} (误差不超过 0.001);

$$\text{解 } e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} + \cdots.$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } r_n &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots \\ &= \frac{1}{n!2^n} [1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+1)} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots] \\ &< \frac{1}{n!2^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \cdot n!2^{n-2}}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } r_4 = \frac{1}{3 \cdot 5!2^3} \approx 0.0003.$$

因此取 $n=4$ 得

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} \approx 1.648.$$

(3) $\sqrt[9]{522}$ (误差不超过 0.00001);

$$\text{解 } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots (-1 < x < 1),$$

$$\begin{aligned}\sqrt[9]{522} &= 2(1 + \frac{10}{2^9})^{1/9} \\ &= 2[1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{8}{9^2 \cdot 2!} \cdot (\frac{10}{2^9})^2 + \frac{8 \cdot 17}{3^2 \cdot 3!} \cdot (\frac{10}{2^9})^3 - \cdots].\end{aligned}$$

$$\text{由于 } \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} \approx 0.002170, \quad \frac{8}{9^2 \cdot 2!} \cdot (\frac{10}{2^9})^2 \approx 0.000019,$$

$$\text{故 } \sqrt[9]{522} = 2(1 + 0.002170 - 0.000019) \approx 2.00430.$$

(4) $\cos 2^\circ$ (误差不超过 0.0001).

$$\text{解 } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos 2^\circ = \cos \frac{\pi}{90} = 1 - \frac{1}{2!} \cdot (\frac{\pi}{90})^2 + \frac{1}{4!} \cdot (\frac{\pi}{90})^4 - \frac{1}{6!} \cdot (\frac{\pi}{90})^6 + \cdots.$$

$$\text{由于 } \frac{1}{2!} \cdot (\frac{\pi}{90})^2 \approx 6 \times 10^{-4}, \quad \frac{1}{4!} \cdot (\frac{\pi}{90})^4 \approx 10^{-8},$$

$$\text{故 } \cos 2^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \cdot (\frac{\pi}{90})^2 \approx 1 - 0.0006 = 0.9994.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

(1) $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx$ (误差不超过 0.0001);

$$\text{解 } \int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_0^{0.5} [1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots + (-1)^n x^{4n} + \cdots] dx$$

$$= (x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{13}x^{13} + \cdots) \Big|_0^{0.5}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{13}} + \cdots.$$

$$\text{因为 } \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} \approx 0.00625, \quad \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} \approx 0.00028, \quad \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{13}} \approx 0.000009,$$

所以 $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} \approx 0.4940$.

(2) $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx$ (误差不超过 0.0001).

解 $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots (-1 < x < 1)$,

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx &= \int_0^{0.5} [1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n} + \cdots] dx \\ &= (x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{25}x^5 - \frac{1}{49}x^7 + \cdots) \Big|_0^{0.5} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} + \cdots. \end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} \approx 0.0139$, $\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} \approx 0.0013$, $\frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} \approx 0.0002$,

所以 $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} \approx 0.487$.

3. 将函数 $e^x \cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$,

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= e^x \cdot \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}[e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} x^n \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{n!} x^n. \end{aligned}$$

因为 $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

所以 $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} [e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}] = 2^{\frac{n}{2}} (2 \cos \frac{n\pi}{4}) = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$.

因此 $e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty)$.

习题 11-7

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为:

$$(1) f(x) = 3x^2 + 1 \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

解 因为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) dx = 2(\pi^2 + 1), \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \cos n\pi x dx = (-1)^n \frac{12}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \sin n\pi x dx = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \pi^2 + 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$(2) f(x) = e^{2x} \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

解 因为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2\pi}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \cos n\pi x dx = \frac{2(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} \quad (n=1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \sin n\pi x dx = -\frac{n(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4} (2\cos nx - n\sin nx) \right]$$

$$(x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} bx & -\pi \leq x < 0 \\ ax & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad (a, b \text{ 为常数, 且 } a > b > 0).$$

解 因为

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 bxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} axdx = \frac{\pi}{2}(a-b),$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 bxcosnxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} axcosnxdx \\ &= \frac{b-a}{n^2\pi} [1 - (-1)^n] \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 bxsinnxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} axsinnxdx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{a+b}{n} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{\pi}{4}(a-b) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[1 - (-1)^n](b-a)}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n} \sin nx \right\}$$

$$(x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

$$(1) f(x) = 2\sin \frac{x}{3} \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

解 将 $f(x)$ 拓广为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中连续, 在 $x=\pm\pi$ 间断, 且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-) + F(-\pi^+)] \neq f(-\pi), \quad \frac{1}{2}[F(\pi^-) + F(\pi^+)] \neq f(\pi),$$

故 $F(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\pi, \pi)$ 中收敛于 $f(x)$, 而在 $x=\pm\pi$ 处 $F(x)$ 的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$.

计算傅氏系数如下:

因为 $2\sin \frac{x}{3} \quad (-\pi < x < \pi)$ 是奇函数, 所以 $a_n=0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2\sin \frac{x}{3} \sin nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\frac{1}{3}-n)x - \cos(\frac{1}{3}+n)x]dx$$

$$=(-1)^{n+1} \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{n}{9n^2-1} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{9n^2-1} \quad (-\pi < x < \pi).$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^x & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

解 将 $f(x)$ 拓广为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中连续, 在 $x=\pm\pi$ 间断, 且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-)+F(-\pi^+)] \neq f(-\pi), \quad \frac{1}{2}[F(\pi^-)+F(\pi^+)] \neq f(\pi),$$

故 $F(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\pi, \pi)$ 中收敛于 $f(x)$, 而在 $x=\pm\pi$ 处 $F(x)$ 的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$.

计算傅氏系数如下:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^x dx + \int_0^{\pi} dx \right] = \frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^x \sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{-n[1-(-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2} + \frac{1-(-1)^n}{n} \right\} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2} \cos nx + \left[\frac{-n+(-1)^n n e^{-\pi}}{1+n^2} + \frac{1-(-1)^n}{n} \right] \sin nx \right\}$$

$$(-\pi < x < \pi).$$

3. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 证明 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

证明 我们知道, 若 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数, 则

$$\int_a^{a+l} f(x) dx \text{ 的值与 } a \text{ 无关, 且 } \int_a^{a+l} f(x) dx = \int_0^l f(x) dx,$$

因为 $f(x)$, $\cos nx$, $\sin nx$ 均为以 2π 为周期的函数, 所以 $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ 均为以 2π 为周期的函数, 从而

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

同理
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

4. 将函数 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 展开成傅里叶级数:

解 因为 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ 为偶函数, 故 $b_n = 0$ ($n=1, 2, \dots$), 而

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\frac{1}{2}-n)x - \cos(\frac{1}{2}+n)x] dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2-1} \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

由于 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 所以

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2-1} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

5. 设 $f(x)$ 的周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式这

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases},$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 故 $a_n = 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$), 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin nx dx \right]$$

$$= -\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

又 $f(x)$ 的间断点为 $x=(2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 所以

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \sin nx \quad (x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

6. 将函数 $f(x) = \frac{\pi-x}{2} \quad (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成正弦级数.

解 作奇延拓得 $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases},$$

再周期延拓 $F(x)$ 到 $(-\infty, +\infty)$, 则当 $x \in (0, \pi]$ 时 $F(x)=f(x)$, $F(0)=0 \neq \frac{\pi}{2} = f(0)$.

因为 $a_n=0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$, 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x-\pi}{2} \sin nx dx = \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \quad (0 < x \leq \pi)$,

级数在 $x=0$ 处收敛于 0.

7. 将函数 $f(x)=2x^2 \quad (0 \leq x \leq \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 对 $f(x)$ 作奇延拓, 则 $a_n=0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$, 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 \sin nx dx = \frac{4}{\pi} \left[(-1)^n \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) - \frac{2}{n^3} \right] \quad (n=1, 2, \dots),$$

故正弦级数为

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) - \frac{2}{n^3} \right] \sin nx \quad (0 \leq x < \pi),$$

级数在 $x=0$ 处收敛于 0.

对 $f(x)$ 作偶延拓, 则 $b_n=0 \quad (n=1, 2, \dots)$, 而

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 dx = \frac{4}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{8}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故余弦级数为

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

8. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 证明

(1) 如果 $f(x-\pi) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0=0, a_{2k}=0, b_{2k}=0 (k=1, 2, \dots)$;

解 因为

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \stackrel{\text{令 } t = \pi + x}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\pi) dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = -a_0,$$

所以 $a_0=0$.

因为

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2kx dx \stackrel{\text{令 } t = \pi + x}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\pi) \cos 2k(t-\pi) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos 2kt dt = -a_{2k}, \end{aligned}$$

所以 $a_{2k}=0$.

同理 $b_{2k}=0 (k=1, 2, \dots)$.

(2) 如果 $f(x-\pi) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0, b_{2k+1}=0 (k=1, 2, \dots)$.

解 因为

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2k+1)x dx \\ &\stackrel{\text{令 } t = \pi + x}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\pi) \cos(2k+1)(t-\pi) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(2k+1)t dt = -a_{2k+1}, \end{aligned}$$

所以 $a_{2k+1}=0 (k=1, 2, \dots)$.

同理 $b_{2k+1}=0 (k=1, 2, \dots)$.

习题 11-8

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式):

$$(1) f(x)=1-x^2 \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right);$$

解 因为 $f(x)=1-x^2$ 为偶函数, 所以 $b_n=0 (n=1, 2, \cdots)$, 而

$$a_0 = \frac{2}{1/2} \int_0^{1/2} (1-x^2) dx = 4 \int_0^{1/2} (1-x^2) dx = \frac{11}{6},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{1/2} \int_0^{1/2} (1-x^2) \cos \frac{n\pi x}{1/2} dx \\ &= 4 \int_0^{1/2} (1-x^2) \cos 2n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2} \quad (n=1, 2, \cdots), \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 所以

$$f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos 2n\pi x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases};$$

$$\text{解 } a_n = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^{1/2} dx - \int_{1/2}^1 dx = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^0 x \cos n\pi x dx + \int_0^{1/2} \cos n\pi x dx - \int_{1/2}^1 \cos n\pi x dx \\ &= \frac{1}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n=1, 2, \cdots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = \int_{-1}^0 x \sin n\pi x dx + \int_0^{1/2} \sin n\pi x dx - \int_{1/2}^1 \sin n\pi x dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} \quad (n=1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

而在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x)$ 的间断点为 $x=2k, 2k+\frac{1}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\text{故 } f(x) = -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \right] \cos n\pi x + \frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \sin n\pi x \right\}$$

$$(x \neq 2k, x \neq 2k + \frac{1}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & -3 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 3 \end{cases}.$$

$$\text{解 } a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) dx + \int_0^3 dx \right] = -1,$$

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right]$$

$$= \frac{6}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] (n=1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) \sin \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right]$$

$$= \frac{6}{n\pi} (-1)^n (n=1, 2, \dots),$$

而在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $f(x)$ 的间断点为

$$x=3(2k+1), k=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\text{故 } f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{6}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] \cos \frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right\},$$

$$(x \neq 3(2k+1), k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ l-x & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases};$$

解 正弦级数:

对 $f(x)$ 进行奇延拓, 则函数的傅氏系数为

$$a_0=0 (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] = \frac{4l}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} (n=1, 2, \dots)$$

故
$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{l}, x \in [0, l].$$

余弦级数:

对 $f(x)$ 进行偶延拓, 则函数的傅氏系数为

$$a_0 = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) dx \right] = \frac{l}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right]$$

$$= \frac{2l}{n^2 \pi^2} [2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n] \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故
$$f(x) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n] \cos \frac{n\pi x}{l}, x \in [0, l].$$

(2) $f(x) = x^2 (0 \leq x \leq 2).$

解 正弦级数:

对 $f(x)$ 进行奇延拓, 则函数的傅氏系数为

$$a_0 = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi} + \frac{16}{(n\pi)^3} [(-1)^n - 1],$$

故
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi} + \frac{16}{(n\pi)^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^3 \pi^2} \right\} \sin \frac{n\pi x}{2}, x \in [0, 2).$$

余弦级数:

对 $f(x)$ 进行偶延拓, 则函数的傅氏系数为

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = (-1)^n \frac{16}{(n\pi)^2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故

$$f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 16}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}, x \in [0, 2].$$

总习题十一

1. 填空:

(1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是它收敛的_____条件, 不是它收敛的_____条件;

解 必要; 充分.

(2) 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的_____条件;

解 充分必要.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定_____; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定_____.

解 收敛; 发散.

2. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[3]{n}}}$;

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{\sqrt[3]{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\sqrt[3]{n}}} = 1,$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由比较审敛法知, 级数发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$;

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{2(n+1)^2} \cdot \frac{2n^2}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty,$$

故由比值审敛法知, 级数发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$;

解 因为

$$\frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} < \frac{n}{2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} < 1$$

所以由根值审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛; 由比较审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n};$$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n} = \infty,$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由比较审敛法知, 原级数发散.

$$\text{提示: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^{10} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{10 \ln^9 x \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^9 x} = \cdots = \frac{1}{10!} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{10!} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} \quad (a > 0, s > 0).$$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^s}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{(\sqrt[n]{n})^s} = a,$$

故由根值审敛法知, 当 $a < 1$ 时级数收敛, 当 $a > 1$ 时级数发散.

当 $a=1$ 时, 原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, 这是 $p=s$ 的 p -级数, 当 $s > 1$ 时级数收敛, 当 $s \leq 1$ 时级数发散.

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 与收敛.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2 + 2u_n v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + 2v_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^2}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$,

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + 2u_nv_n)$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(u_n^2 + 2u_nv_n) + v_n^2] = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$$

也是收敛的.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛? 试说明理由.

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 不一定收敛.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 否则未必.

例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1) \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}]$ 发散, 并且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1) \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{(-1) \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

5. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p};$$

解 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{1}{n^p}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 是 p 级数. 故当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 是收敛的, 当 $p \leq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

发散. 因此当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 是交错级数, 且满足莱布尼茨定理的条件, 因而收敛, 这时是

条件收敛的.

当 $p \leq 0$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \neq 0$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 发散.

综上所述, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时绝对收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛, 当 $p \leq 0$ 时发散.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}};$$

解 因为 $|(-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}| \leq \frac{1}{\pi^{n+1}}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{n+1}}$ 收敛, 故由比较审敛法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}| \text{ 收敛, 从而原级数绝对收敛.}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n};$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-1)^n \ln \frac{n+1}{n}|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{1}{n})^n = \ln e = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由

比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \ln \frac{n+1}{n}|$ 发散, 即原级数不是绝对收敛的.

另一方面, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 是交错级数, 且满足莱布尼茨定理的条件, 所以该级数收敛,

从而原级数条件收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

解 令 $u_n = (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

故由比值审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}|$ 收敛, 从而原级数绝对收敛.

6. 求下列级限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} (1 + \frac{1}{k})^{k^2};$$

解 显然 $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} (1 + \frac{1}{k})^{k^2}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ 的前 n 项部分和.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{e}{3} < 1$, 所以由根值审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ 收敛,

从而部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛.

$$\text{因此 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} (1 + \frac{1}{k})^{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot s_n = 0.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} [2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}}].$$

$$\text{解 } 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n}}.$$

显然 $s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的前 n 项部分和.

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \text{ 则 } S(x) = [\int_0^x S(x) dx]' = [\sum_{n=1}^{\infty} x^n]' = [\frac{1}{1-x} - 1]' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n (\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{1}{3} S(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{3}{4}$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}}] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{s_n} = 2^{\frac{3}{4}}.$$

7. 求下列幂级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{n} x^n;$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3(\frac{3}{5})^n + 5}{(\frac{3}{5})^{n+1} + 1} = 5, \text{ 所以收敛半径为 } R = \frac{1}{5}.$$

因为当 $x = \frac{1}{5}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(\frac{3}{5})^n + 1]$, 是发散的;

当 $x = -\frac{1}{5}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} [(\frac{3}{5})^n + 1]$, 是收敛的,

所以幂级数的收敛域为 $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n;$$

解 $u_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n |x| = e|x|$, 由根值审敛法, 当 $e|x| < 1$, 即 $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$ 时, 幂级数收敛; 当 $e|x| > 1$, 时幂级数发散.

当 $x = -\frac{1}{e}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} (\frac{1}{e})^n$;

当 $x = \frac{1}{e}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{n^2} (\frac{1}{e})^n$.

因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2},$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} (\frac{1}{e})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$,

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{n^2} (\frac{1}{e})^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} (\frac{1}{e})^n$ 均发散, 从而收敛域为 $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n;$$

解 $u_n = n(x+1)^n$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x+1| = |x+1|,$$

根据比值审敛法, 当 $|x+1|<1$, 即 $-2<x<0$ 时, 幂级数收敛; 当 $|x+1|>1$ 时, 幂级数发散.

又当 $x=0$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 是发散的; 当 $x=-2$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, 也是发散的,

所以幂级数的收敛域为 $(-2, 0)$.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}.$$

解 $u_n = \frac{n}{2^n} x^{2n}$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \cdot x^2 = \frac{1}{2} x^2,$$

根据比值审敛法, 当 $\frac{1}{2} x^2 < 1$, 即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 时, 幂级数收敛; 当 $\frac{1}{2} x^2 > 1$ 时, 幂级数发散.

又当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 是发散的, 所以收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

8. 求下列幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)};$$

解 设幂级数的和函数为 $S(x)$, 则

$$\begin{aligned} S(x) &= \left[\int_0^x S(x) dx \right]' = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} \right]' = \left[\frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^{n-1} \right]' \\ &= \left[\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} \right]' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2} \quad \left(\frac{x^2}{2} < 1 \right), \end{aligned}$$

即
$$S(x) = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2} \quad (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}).$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1};$$

解 设幂级数的和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \quad (x^2 < 1).$$

因为当 $x = \pm 1$ 时, 幂级数收敛, 所以有

$$S(x)=\arctan x \quad (-1\leq x\leq 1).$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n ;$$

解 设幂级数的和函数为 $S(x)$, 则

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n = (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1} = (x-1) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \right]' \\ &= (x-1) \left[(x-1) \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{n-1} \right]' = (x-1) \left[\frac{x-1}{1-(x-1)} \right]' = \frac{x-1}{(2-x)^2} \quad (|x-1|<1), \end{aligned}$$

即
$$S(x) = \frac{x-1}{(2-x)^2} \quad (0 < x < 2).$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

解 易知幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

设幂级数的和函数为 $S(x)$, 则当 $x \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n dx = \frac{1}{x} \int_0^x \left[\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} dx \right] dx \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \left[\int_0^x \frac{1}{1-x} dx \right] dx = -\frac{1}{x} \int_0^x \ln(1-x) dx \\ &= -\frac{1}{x} [x \ln(1-x) - x - \ln(1-x)] \\ &= 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \end{aligned}$$

又显然 $S(0)=0$, 因此

$$S(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

9. 求下列数项级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!};$$

$$\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)+n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}.$$

因为 $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, 两边求导得 $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$, 再求导得 $e^x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^{n-2}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = x^2 e^x + e^x,$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1) = 2e.$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \cos 1 + \frac{1}{2} \sin 1. \end{aligned}$$

提示: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}.$

10. 将下列函数展开成 x 的幂级数:

$$(1) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$\text{解 } \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \int_0^x [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' dx = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx,$$

因为 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, |x| \leq 1,$

故 $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1).$

$$(2) \frac{1}{(2-x)^2}.$$

$$\text{解 } \frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1} \quad (-2 \leq x \leq 2).$$

11. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ e^x & x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

$$\text{解 } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi} - n^2 a_n,$$

$$\text{即 } a_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{(n^2 + 1)\pi} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx \\ &= (-n) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx = -n a_n \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{(n^2 + 1)\pi} (\cos nx - n \sin x)$$

$$(-\infty < x < +\infty \text{ 且 } x \neq n\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

12. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq h \\ 0 & h < x \leq \pi \end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 若将函数进行奇延拓, 则傅里叶系数为

$$a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h \sin nx dx = \frac{2(1 - \cos nh)}{n\pi}.$$

因此, 函数展开成正弦级数为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nh}{n} \sin nx, \quad x \in (0, h) \cup (h, \pi),$$

当 $x=h$ 时, $f(h)=\frac{1}{2}$.

若将函数进行偶延拓, 则傅里叶系数为

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h dx = \frac{2h}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h \cos nx dx = \frac{2 \sin nh}{n\pi} (n=1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 (n=1, 2, \dots),$$

.

因此, 函数展开成余弦级数为

$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} \cos nx, \quad x \in [0, h) \cup (h, \pi),$$

当 $x=h$ 时, $f(h)=\frac{1}{2}$.

习题 12-1

1. 试说出下列各微分方程的阶数:

$$(1) x(y')^2 - 2yy' + x = 0;$$

解 一阶.

$$(2) x^2y' - xy' + y = 0;$$

解 一阶.

$$(3) xy''' + 2y' + x^2y = 0;$$

解 三阶.

$$(4) (7x - 6y)dx + (x + y)dy = 0;$$

解 一阶.

$$(5) L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0;$$

解 二阶.

$$(6) \frac{d\rho}{d\theta} + \rho = \sin^2 \theta.$$

解 一阶.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解:

$$(1) xy' = 2y, y = 5x^2;$$

解 $y' = 10x$.

因为 $xy' = 10x^2 = 2(5x^2) = 2y$, 所以 $y = 5x^2$ 是所给微分方程的解.

$$(2) y' + y = 0, y = 3\sin x - 4\cos x;$$

解 $y' = 3\cos x + 4\sin x$.

因为 $y' + y = 3\cos x + 4\sin x + 3\sin x - 4\cos x = 7\sin x - \cos x \neq 0$,

所以 $y = 3\sin x - 4\cos x$ 不是所给微分方程的解.

$$(3) y'' - 2y' + y = 0, y = x^2 e^x;$$

解 $y' = 2xe^x + x^2 e^x, y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2 e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2 e^x$.

因为 $y'' - 2y' + y = 2e^x + 4xe^x + x^2 e^x - 2(2xe^x + x^2 e^x) + x^2 e^x = 2e^x \neq 0$,

所以 $y = x^2 e^x$ 不是所给微分方程的解.

$$(4) y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0, y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

解 $y' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}, y'' = C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}$.

因为 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y$

$$\begin{aligned} &= C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} - (\lambda_1 + \lambda_2)(C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x}) + \lambda_1\lambda_2(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 是所给微分方程的解.

3. 在下列各题中, 验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解:

(1) $(x-2y)y' = 2x-y, x^2-xy+y^2=C;$

解 将 $x^2-xy+y^2=C$ 的两边对 x 求导得

$$2x-y-xy'+2y y'=0,$$

即 $(x-2y)y'=2x-y,$

所以由 $x^2-xy+y^2=C$ 所确定的函数是所给微分方程的解.

(2) $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0, y=\ln(xy).$

解 将 $y=\ln(xy)$ 的两边对 x 求导得

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} y', \text{ 即 } y' = \frac{y}{xy-x}.$$

再次求导得

$$y'' = \frac{y'(xy-x) - y(y+xy'-1)}{(xy-x)^2} = \frac{-xy' - y^2 + y}{(xy-x)^2} = \frac{1}{xy-x} \cdot \left(-\frac{x}{y} y'^2 - yy' + y'\right).$$

注意到由 $y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} y'$ 可得 $\frac{x}{y} y' = xy' - 1$, 所以

$$y'' = \frac{1}{xy-x} \cdot [-(xy'-1)y' - yy' + y'] = \frac{1}{xy-x} \cdot (-xy'^2 - yy' + 2y'),$$

从而 $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0,$

即由 $y=\ln(xy)$ 所确定的函数是所给微分方程的解.

4. 在下列各题中, 确定函数关系式中所含的参数, 使函数满足所给的初始条件:

(1) $x^2-y^2=C, y|_{x=0}=5;$

解 由 $y|_{x=0}=0$ 得 $0^2-5^2=C, C=-25$, 故 $x^2-y^2=-25$.

(2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1;$

解 $y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x}.$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 得

$$\begin{cases} C_1=0 \\ C_2+C_1=1 \end{cases},$$

解之得 $C_1=0, C_2=1$, 故 $y=xe^{2x}$.

$$(3) y=C_1\sin(x-C_2), y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=0.$$

$$\text{解 } y'=C_1\cos(x-C_2).$$

由 $y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=0$ 得

$$\begin{cases} C_1\sin(\pi-C_2)=1 \\ C_1\cos(\pi-C_2)=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} C_1\sin C_2=1 \\ -C_1\cos C_2=0 \end{cases},$$

解之得 $C_1=1, C_2=\frac{\pi}{2}$, 故 $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$, 即 $y=-\cos x$.

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线在点 (x, y) 处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

解 设曲线为 $y=y(x)$, 则曲线上点 (x, y) 处的切线斜率为 y' , 由条件 $y'=x^2$, 这便是所求微分方程.

(2) 曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 y 轴平分.

解 设曲线为 $y=y(x)$, 则曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线斜率为 $-\frac{1}{y'}$, 由条件第 PQ 中点的横坐标为 0, 所以 Q 点的坐标为 $(-x, 0)$, 从而有

$$\frac{y-0}{x+(-x)} = -\frac{1}{y'}, \text{ 即 } yy'+2x=0.$$

6. 用微分方程表示一物理命题: 某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比, 所温度的平方成反比.

$$\text{解 } \frac{dP}{dT} = k \frac{P}{T^2}, \text{ 其中 } k \text{ 为比例系数.}$$

习题 12-11

1. 试用幂级数求下列各微分方程的解:

(1) $y' - xy - x = 1$;

解 设方程的解为 $y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - a_0 x - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - x = 1,$$

即 $(a_1 - 1) + (2a_2 - a_0 - 1)x + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)a_{n+2} - a_n]x^{n+1} = 0.$

可见 $a_1 - 1 = 0, 2a_2 - a_0 - 1 = 0, (n+2)a_{n+2} - a_n = 0 (n=1, 2, \dots),$

于是 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1+a_0}{2}, a_3 = \frac{1}{3!!}, a_4 = \frac{1+a_0}{4!!}, \dots,$

$$a_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)!!}, a_{2k} = \frac{1+a_0}{(2k)!!}, \dots$$

所以
$$\begin{aligned} y &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2k-1)!!} x^{2k-1} + \frac{1+a_0}{(2k)!!} x^{2k} \right] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!!} x^{2k-1} + (1+a_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^k \\ &= -1 + (1+a_0) e^{\frac{x^2}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!!} x^{2k-1}, \end{aligned}$$

即原方程的通解为 $y = C e^{\frac{x^2}{2}} - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!!} x^{2k-1}.$

(2) $y'' + xy' + y = 0$;

解 设方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

即
$$a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n]x^n = 0,$$

于是
$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0, a_3 = -\frac{1}{3}a_1, \dots, a_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}a_1, a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!!}a_0, \dots$$

所以
$$y = a_0 + a_1x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k a_0}{(2k)!!} x^{2k} + \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!!} x^{2k+1} \right]$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^k + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} x^{2k-1}$$

$$= a_0 e^{-\frac{x^2}{2}} + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} x^{2k-1},$$

即原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}} + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} x^{2k-1}.$$

(3) $xy'' - (x+m)y' + my = 0$ (m 为自然数);

解 设方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (x+m) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

即
$$m(a_0 - a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n-m)a_{n+1} - (n-m)a_n]x^n = 0.$$

可见 $(a_0 - a_1)m = 0, (n-m)[(n+1)a_{n+1} - a_n] = 0 \ (n \neq m),$

于是
$$a_0 = a_1, a_n = \frac{a_{m+1}}{n(n-1)\cdots(m+2)} \ (n \geq m+2), a_n = \frac{1}{n!}a_1 \ (n \leq m).$$

所以
$$y = a_0 + \sum_{n=1}^m \frac{a_0}{n!} x^n + a_{m+1} x^{m+1} + \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{a_{m+1}}{n(n-1)\cdots(m+2)} x^n$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} + a_{m+1} x^{m+1} + (m+1)! a_{m+1} \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= a_0 \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} + (m+1)! a_{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= a_0 \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} + (m+1)! a_{m+1} (e^x - \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!}) \\
&= (m+1)! a_{m+1} e^x + [a_0 - (m+1)! a_{m+1}] \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!},
\end{aligned}$$

即原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} \quad (\text{其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

$$(4)(1-x)y' = x^2 - y;$$

解 设方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^2 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$\text{即} \quad a_1 + a_0 + 2a_2 x + (3a_3 - a_2 - 1)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - na_n + a_n] x^n = 0.$$

$$\text{可见} \quad a_1 + a_0 = 0, 2a_2 = 0, 3a_3 - a_2 - 1 = 0, (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n = 0 (n \geq 3),$$

$$\text{于是} \quad a_1 = -a_0, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}, a_n = \frac{n-2}{n} a_{n-1} = \frac{2}{n(n-1)} (n \geq 4).$$

因此原方程的通解为

$$y = C(1-x) + \frac{1}{3}x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} x^n \quad (C = a_0 \text{ 为任意常数}).$$

$$(5)(x+1)y' = x^2 - 2x + y.$$

解 设方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$(x+1)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^2-2x+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

$$\text{即} \quad -a_0+a_1+2(1+a_2)x+(a_2+3a_3-1)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}[(n-1)a_n+(n+1)a_{n+1}]x^n=0.$$

$$\text{于是} \quad a_1=a_0, a_2=-1, a_3=\frac{2}{3}, a_n=-\frac{n-2}{n}a_{n-1}=(-1)^{n-3}\frac{4}{n(n-1)}(n\geq 4).$$

因此原方程的通解为

$$y=C(1+x)-x^2+\frac{2}{3}x^3+\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-3}\frac{4}{n(n-1)}x^n \quad (C=a_0 \text{ 为任意常数}).$$

2. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的解:

$$(1)y'=y^2+x^3, \quad y|_{x=0}=\frac{1}{2};$$

解 根据初始条件, 可设方程的解为 $y=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n)^2+x^3,$$

$$\text{即} \quad a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^3+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+(a_2^2+2a_1a_3)x^4+\cdots.$$

比较两边同次幂的系数得

$$a_1=\frac{1}{4}, 2a_2=a_1, 3a_3=a_2+a_1^2, 4a_4=a_3+2a_1a_2+1, \cdots,$$

$$\text{于是} \quad a_1=\frac{1}{4}, a_2=\frac{1}{8}, a_3=\frac{1}{16}, a_4=\frac{9}{32}, \cdots.$$

因此所求特解为

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots.$$

$$(2)(1-x)y'+y=1+x, \quad y|_{x=0}=0;$$

解 根据初始条件, 可设方程的解为 $y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 代入方程得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

即
$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=1+x.$$

比较系数得

$$a_1=1, \quad a_2=\frac{1}{2}, \quad a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{1}{n(n-1)} \quad (n\geq 3).$$

因此所求特解为

$$y=x+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n.$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ 的和函数为 $(1-x)\ln(1-x)+x$, 所以特解还可以写成

$$y=2x+(1-x)\ln(1-x)+x.$$

(3) $\frac{d^2x}{dt^2}+x\cos t=0, \quad x|_{t=0}=a, \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0}=0.$

解 根据初始条件, 可设方程的解为 $x=a+\sum_{n=2}^{\infty}a_nt^n.$

将 $x=a+\sum_{n=2}^{\infty}a_nt^n$, $\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$ 和 $\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$ 代

入方程得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}+(a+\sum_{n=2}^{\infty}a_nt^n)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}=0.$$

将级数展开、整理合并同次项, 并比较系数得

$$a_0=a, \quad a_1=0, \quad a_2=-\frac{a}{2!}, \quad a_3=0, \quad a_4=\frac{2a}{4!},$$

$$a_5=0, \quad a_6=-\frac{9a}{6!}, \quad a_7=0, \quad a_8=\frac{55a}{8!}, \dots$$

故所求特解为

$$x=a(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8+\dots).$$

习题 12-2

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy' - y \ln y = 0$;

解 分离变量得

$$\frac{1}{y \ln y} dy = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{1}{y \ln y} dy = \int \frac{1}{x} dx,$$

即 $\ln(\ln y) = \ln x + \ln C$,

故通解为 $y = e^{Cx}$.

(2) $3x^2 + 5x - 5y' = 0$;

解 分离变量得

$$5dy = (3x^2 + 5x)dx,$$

两边积分得

$$\int 5dy = \int (3x^2 + 5x)dx,$$

即 $5y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1$,

故通解为 $y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$, 其中 $C = \frac{1}{5}C_1$ 为任意常数.

(3) $\sqrt{1-x^2} y' = \sqrt{1-y^2}$;

解 分离变量得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

两边积分得

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

即 $\arcsin y = \arcsin x + C$,

故通解为 $y = \sin(\arcsin x + C)$.

(4) $y' - xy' = a(y^2 + y')$;

解 方程变形为 $(1-x-a)y' = ay^2$,

分离变量得

$$\frac{1}{y^2} dy = \frac{a}{1-a-x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{a}{1-a-x} dx,$$

即
$$-\frac{1}{y} = -a \ln(1-a-x) - C_1,$$

故通解为 $y = \frac{1}{C + a \ln(1-a-x)}$, 其中 $C = aC_1$ 为任意常数.

(5) $\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0;$

解 分离变量得

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y} y = -\frac{\sec^2 x}{\tan x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{\sec^2 y}{\tan y} y = -\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx,$$

即 $\ln(\tan y) = -\ln(\tan x) + \ln C,$

故通解为 $\tan x \tan y = C.$

(6) $\frac{dy}{dx} = 10^{x+y};$

解 分离变量得

$$10^{-y} dy = 10^x dx,$$

两边积分得

$$\int 10^{-y} dy = \int 10^x dx,$$

即
$$-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{C}{\ln 10},$$

或 $10^{-y} = 10^x + C,$

故通解为 $y = -\lg(C - 10^x).$

(7) $(e^{x+y} - e^x) dx + (e^{x+y} + e^y) dy = 0;$

解 方程变形为 $e^y(e^x + 1) dy = e^x(1 - e^y) dx,$

分离变量得

$$\frac{e^y}{1 - e^y} dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{e^y}{1-e^y} dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx,$$

即 $-\ln(e^y) = \ln(e^x+1) - \ln C,$

故通解为 $(e^x+1)(e^y-1)=C.$

$$(8) \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy = 0;$$

解 分离变量得

$$\frac{\cos y}{\sin y} dy = -\frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

即 $\ln(\sin y) = -\ln(\sin x) + \ln C,$

故通解为 $\sin x \sin y = C.$

$$(9) (y+1)^2 \frac{dy}{dx} + x^3 = 0;$$

解 分离变量得

$$(y+1)^2 dy = -x^3 dx,$$

两边积分得

$$\int (y+1)^2 dy = -\int x^3 dx,$$

$$\text{即 } \frac{1}{3}(y+1)^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C_1,$$

故通解为 $4(y+1)^3 + 3x^4 = C$ ($C=12C_1$).

$$(10) y dx + (x^2 - 4x) dy = 0.$$

解 分离变量得

$$\frac{4}{y} dy = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right) dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{4}{y} dy = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right) dx,$$

即 $\ln y^4 = \ln x - \ln(4-x) + \ln C,$

故通解为 $y^4(4-x) = Cx.$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) y' = e^{2x-y}, y|_{x=0} = 0;$$

解 分离变量得

$$e^y dy = e^{2x} dx,$$

两边积分得

$$\int e^y dy = \int e^{2x} dx,$$

即 $e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C,$

或 $y = \ln(\frac{1}{2}e^{2x} + C).$

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $\ln(\frac{1}{2} + C) = 0, C = \frac{1}{2},$

所以特解 $y = \ln(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}).$

(2) $\cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4};$

解 分离变量得

$$\tan y dy = \tan x dx,$$

两边积分得

$$\int \tan y dy = \int \tan x dx,$$

即 $-\ln(\cos y) = -\ln(\cos x) - \ln C,$

或 $\cos y = C \cos x.$

由 $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$ 得 $\cos \frac{\pi}{4} = C \cos 0 = C, C = \frac{1}{\sqrt{2}},$

所以特解为 $\sqrt{2} \cos y = \cos x.$

(3) $y' \sin x = y \ln y, y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e;$

解 分离变量得

$$\frac{1}{y \ln y} dy = \frac{1}{\sin x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{1}{y \ln y} dy = \int \frac{1}{\sin x} dx,$$

即 $\ln(\ln y) = \ln(\tan \frac{x}{2}) + \ln C,$

或 $y = e^{C \tan \frac{x}{2}}.$

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 得 $e = e^{C \tan \frac{\pi}{4}}, C = 1,$

所以特解为 $y = e^{\tan \frac{x}{2}}$.

$$(4) \cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0, \quad y|_{x=0} = \frac{\pi}{4};$$

解 分离变量得

$$-\frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx,$$

两边积分得

$$-\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx,$$

$$\text{即} \quad \ln |\cos y| = \ln(e^x + 1) + \ln |C|,$$

$$\text{或} \quad \cos y = C(e^x + 1).$$

$$\text{由 } y|_{x=0} = \frac{\pi}{4} \text{ 得 } \cos \frac{\pi}{4} = C(e^{\frac{\pi}{4}} + 1), \quad C = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以特解为 } \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}(e^x + 1).$$

$$(5) x dy + 2y dx = 0, \quad y|_{x=2} = 1.$$

解 分离变量得

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{2}{x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{2}{x} dx,$$

$$\text{即} \quad \ln y = -2 \ln x + \ln C,$$

$$\text{或} \quad y = Cx^{-2}.$$

$$\text{由 } y|_{x=2} = 1 \text{ 得 } C \cdot 2^{-2} = 1, \quad C = 4,$$

$$\text{所以特解为 } y = \frac{4}{x^2}.$$

3. 有一盛满了水的圆锥形漏漏斗, 高为 10cm, 顶角为 60° , 漏斗下面有面积为 0.5cm^2 的孔, 求水面高度变化的规律及流完所需的时间.

解 设 t 时该已流出的水的体积为 V , 高度为 x , 则由水力学有

$$\frac{dV}{dt} = 0.62 \times 0.5 \times \sqrt{(2 \times 980)x}, \quad \text{即 } dV = 0.62 \times 0.5 \times \sqrt{(2 \times 980)x} dt.$$

$$\text{又因为 } r = x \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}},$$

故 $V = -\pi r^2 dx = -\frac{\pi}{3} x^2 dx,$

从而 $0.62 \times 0.5 \times \sqrt{(2 \times 980)x} dt = -\frac{\pi}{3} x^2 dx,$

即 $dt = \frac{\pi}{3 \times 0.62 \times 0.5 \sqrt{2 \times 980}} x^{\frac{3}{2}} dx,$

因此 $t = \frac{-2\pi}{3 \times 0.62 \times 0.5 \sqrt{2 \times 980}} x^{\frac{5}{2}} + C.$

又因为当 $t=0$ 时, $x=10$, 所以 $C = \frac{\pi}{3 \times 5 \times 0.62 \times 0.5 \sqrt{2 \times 980}} 10^{\frac{5}{2}},$

故水从小孔流出的规律为

$$t = \frac{2\pi}{3 \times 5 \times 0.62 \times 0.5 \sqrt{2 \times 980}} (10^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}}) = -0.0305 x^{\frac{5}{2}} + 9.645.$$

令 $x=0$, 得水流完所需时间约为 10s.

4. 质量为 1g(克)的质点受外力作用作直线运动, 这外力和时间成正比, 和质点运动的速度成反比. 在 $t=10$ s 时, 速度等于 50cm/s, 外力为 4g cm/s², 问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少?

解 已知 $F = k \frac{t}{v}$, 并且法 $t=10$ s 时, $v=50$ cm/s, $F=4$ g cm/s², 故 $4 = k \frac{10}{50}$, 从而 $k=20$, 因此

$$F = 20 \frac{t}{v}.$$

又由牛顿定律, $F=ma$, 即 $1 \cdot \frac{dv}{dt} = 20 \frac{t}{v}$, 故 $v dv = 20t dt$. 这就是速度与时间应满足的微分方程. 解之得

$$\frac{1}{2} v^2 = 10t^2 + C, \text{ 即 } v = \sqrt{20t^2 + 2C}.$$

由初始条件有 $\frac{1}{2} \times 50^2 = 10 \times 10^2 + C$, $C=250$. 因此

$$v = \sqrt{20t^2 + 500}.$$

当 $t=60$ s 时, $v = \sqrt{20 \times 60^2 + 500} = 269.3$ cm/s.

5. 镭的衰变有如下的规律: 镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比. 由经验材料得知, 镭经过 1600 年后, 只余原始量 R_0 的一半. 试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

解 由题设知,

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda R, \text{ 即 } \frac{dR}{R} = -\lambda dt,$$

两边积分得

$$\ln R = -\lambda t + C_1,$$

从而 $R = Ce^{-\lambda t} (C = e^{C_1})$.

因为当 $t=0$ 时, $R=R_0$, 故 $R_0 = Ce^0 = C$, 即 $R = R_0 e^{-\lambda t}$.

又由于当 $t=1600$ 时, $R = \frac{1}{2}R_0$, 故 $\frac{1}{2}R_0 = R_0 e^{-1600\lambda}$, 从而 $\lambda = \frac{\ln 2}{1600}$.

因此 $R = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600}t} = R_0 e^{-0.000433t}$.

6. 一曲线通过点(2, 3), 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 求这曲线方程.

解 设切点为 $P(x, y)$, 则切线在 x 轴, y 轴的截距分别为 $2x, 2y$, 切线斜率为

$$\frac{2y-0}{0-2x} = -\frac{y}{x},$$

故曲线满足微分方程: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, 即 $\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$,

从而 $\ln y + \ln x = \ln C, xy = C$.

因为曲线经过点(2, 3), 所以 $C = 2 \times 3 = 6$, 曲线方程为 $xy = 6$.

7. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为 a , 船行方向始终与河岸垂直, 又设河宽为 h , 河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k). 求小船的航行路线.

解 建立坐标系如图. 设 t 时刻船的位置为 (x, y) , 此时水速为 $v = \frac{dx}{dt} = ky(h-y)$, 故 $dx = ky(h-y)dt$.

又由已知, $y = at$, 代入上式得

$$dx = kat(h-at)dt,$$

积分得

$$x = \frac{1}{2}kaht^2 - \frac{1}{3}ka^2t^3 + C.$$

由初始条件 $x|_{t=0} = 0$, 得 $C = 0$, 故 $x = \frac{1}{2}kaht^2 - \frac{1}{3}ka^2t^3$.

因此船运动路线的函数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}kaht^2-\frac{1}{3}ka^2t^3, \\ y=ay \end{cases},$$

从而一般方程为 $x=\frac{k}{a}(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3)$.

习题 12-3

1. 求下列齐次方程的通解:

$$(1) xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0;$$

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$.

令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = u + \sqrt{u^2 - 1}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$\ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) = \ln x + \ln C, \text{ 即 } u + \sqrt{u^2 - 1} = Cx,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Cx, \text{ 即 } y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2.$$

$$(2) x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x};$$

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$.

令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = u \ln u, \text{ 即 } \frac{1}{u(\ln u - 1)} du = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$\ln(\ln u - 1) = \ln x + \ln C, \text{ 即 } u = e^{Cx+1},$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y = xe^{Cx+1}.$$

$$(3) (x^2 + y^2)dx - xydy = 0;$$

解 这是齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 则原方程化为

$$(x^2 + x^2 u^2)dx - x^2 u(udx + xdu) = 0, \text{ 即 } udu = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$u^2 = \ln x^2 + C,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y^2 = x^2 (\ln x^2 + C).$$

$$(4) (x^3 + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0;$$

解 这是齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 则原方程化为

$$(x^3 + x^3 u^3) dx - 3x^3 u^2 (u dx + x du) = 0, \text{ 即 } \frac{3u^2}{1-2u^3} du = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{2} \ln(1-2u^3) = \ln x + \ln C, \text{ 即 } 2u^3 = 1 - \frac{C}{x^2},$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$x^3 - 2y^3 = Cx.$$

$$(5) (2x \operatorname{sh} \frac{y}{x} + 3y \operatorname{ch} \frac{y}{x}) dx - 3x \operatorname{ch} \frac{y}{x} dy = 0;$$

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \operatorname{th} \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{2}{3} \operatorname{th} u + u, \text{ 即 } \frac{3 \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} du = \frac{2}{x} dx,$$

两边积分得

$$3 \ln(\operatorname{sh} u) = 2 \ln x + \ln C, \text{ 即 } \operatorname{sh}^3 u = Cx^2,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$\operatorname{sh}^2 \frac{y}{x} = Cx^2.$$

$$(6) (1 + 2e^{\frac{x}{y}}) dx + 2e^{\frac{x}{y}} (1 - \frac{x}{y}) dy = 0.$$

解 原方程变为 $\frac{dx}{dy} = \frac{2(\frac{x}{y} - 1)e^{\frac{x}{y}}}{1 + 2e^{\frac{x}{y}}}.$

令 $u = \frac{x}{y}$, 则原方程化为

$$u + y \frac{du}{dy} = \frac{2(u-1)e^u}{1+2e^u}, \text{ 即 } y \frac{du}{dy} = -\frac{u+2e^u}{1+2e^u},$$

分离变量得

$$\frac{1+2e^u}{u+2e^u} du = -\frac{1}{y} dy,$$

两边积分得

$$\ln(u+2e^u) = -\ln y + \ln C, \text{ 即 } y(u+2e^u) = C,$$

将 $u = \frac{x}{y}$ 代入上式得原方程的通解

$$y\left(\frac{x}{y} + 2e^{\frac{x}{y}}\right) = C, \text{ 即 } x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C.$$

2. 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y|_{x=0} = 1;$$

解 这是齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 则原方程化为

$$(x^2u^2 - 3x^2)(udx + xdu) + 2x^2udx = 0,$$

$$\text{即 } \frac{u^2 - 3}{u - u^3} du = \frac{1}{x} dx, \text{ 或 } \left(-\frac{3}{u} + \frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1}\right) du = \frac{1}{x} dx$$

两边积分得

$$-3\ln|u| + \ln|u+1| + \ln|u-1| = \ln|x| + \ln|C|, \text{ 即 } u^2 - 1 = Cxu^3,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y^2 - x^2 = Cy^3.$$

由 $y|_{x=0} = 1$ 得 $C = 1$, 故所求特解为 $y^2 - x^2 = y^3$.

$$(2) y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y|_{x=1} = 2;$$

解 令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + u, \text{ 即 } udu = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}u^2 = \ln x + C,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y^2 = 2x^2(\ln x + C).$$

由 $y|_{x=1}=2$ 得 $C=2$, 故所求特解为 $y^2 = 2x^2(\ln x + 2)$.

$$(3)(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0, y|_{x=1}=1.$$

解 这是齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 则原方程化为

$$(x^2 + 2x^2u - x^2u^2)dx + (x^2u^2 + 2x^2u - x^2)(udx + xdu) = 0,$$

即
$$\frac{u^2 + 2u - 1}{u^3 + u^2 + u + 1} du = -\frac{1}{x} dx,$$

或
$$\left(\frac{1}{u+1} - \frac{2u}{u^2+1}\right) du = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$\ln|u+1| - \ln(u^2+1) = \ln|x| + \ln|C|, \text{ 即 } u+1 = Cx(u^2+1),$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$x+y = C(x^2+y^2).$$

由 $y|_{x=1}=1$ 得 $C=1$, 故所求特解为 $x+y = (x^2+y^2)$.

3. 设有连结点 $O(0, 0)$ 和 $A(1, 1)$ 的一段向上凸的曲线弧 \widehat{OA} , 对于 \widehat{OA} 上任一点 $P(x, y)$,

曲线弧 \widehat{OP} 与直线段 \overline{OP} 所围图形的面积为 x^2 , 求曲线弧 \widehat{OA} 的方程.

解 设曲线弧 \widehat{OA} 的方程为 $y=y(x)$. 由题意得

$$\int_0^x y(x) dx - \frac{1}{2} xy(x) = x^2,$$

两边求导得

$$y(x) - \frac{1}{2} y(x) - \frac{1}{2} xy'(x) = 2x,$$

即
$$y' = \frac{y}{x} - 4.$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则有

$$u + x \frac{du}{dx} = u - 4, \text{ 即 } \frac{1}{u} du = -\frac{4}{x} dx,$$

两边积分得

$$u=-4\ln x+C.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式得方程的通解

$$y=-4x\ln x+Cx.$$

由于 $A(1, 1)$ 在曲线上, 即 $y(1)=1$, 因而 $C=1$, 从则所求方程为 $y=-4x\ln x+x$.

习题 12-4

1. 求下列微分方程的通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = e^{-x};$$

$$\text{解 } y = e^{-\int dx} \left(\int e^{-x} \cdot e^{\int dx} dx + C \right) = e^{-x} \left(\int e^{-x} \cdot e^x dx + C \right) = e^{-x}(x + C).$$

$$(2) xy' + y = x^2 + 3x + 2;$$

$$\text{解 原方程变为 } y' + \frac{1}{x}y = x + 3 + \frac{2}{x}.$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \left(x + 3 + \frac{2}{x} \right) \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[\int \left(x + 3 + \frac{2}{x} \right) x dx + C \right] = \frac{1}{x} \left[\int (x^2 + 3x + 2) dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C \right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 + \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

$$(3) y' + y \cos x = e^{-\sin x};$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= e^{-\int \cos x dx} \left(\int e^{-\sin x} \cdot e^{\int \cos x dx} dx + C \right) \\ &= e^{-\sin x} \left(\int e^{-\sin x} \cdot e^{\sin x} dx + C \right) = e^{-\sin x}(x + C). \end{aligned}$$

$$(4) y' + y \tan x = \sin 2x;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sin 2x \cdot e^{\int \tan x dx} dx + C \right) \\ &= e^{\ln \cos x} \left(\int \sin 2x \cdot e^{-\ln \cos x} dx + C \right) \\ &= \cos x \left(\int 2 \sin x \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} dx + C \right) \\ &= \cos x (-2 \cos x + C) = C \cos x - 2 \cos^2 x. \end{aligned}$$

$$(5) (x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0;$$

$$\text{解 原方程变形为 } y' + \frac{2x}{x^2 - 1}y = \frac{\cos x}{x^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx} \left(\int \frac{\cos x}{x^2 - 1} \cdot e^{\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x^2 - 1} \left[\int \frac{\cos x}{x^2 - 1} \cdot (x^2 - 1) dx + C \right] = \frac{1}{x^2 - 1} (\sin x + C). \end{aligned}$$

$$(6) \frac{d\rho}{d\theta} + 3\rho = 2;$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \rho &= e^{-\int 3d\theta} (\int 2 \cdot e^{\int 3d\theta} d\theta + C) \\ &= e^{-3\theta} (\int 2e^{3\theta} d\theta + C) \\ &= e^{-3\theta} (\frac{2}{3}e^{3\theta} + C) = \frac{2}{3} + Ce^{-3\theta}.\end{aligned}$$

$$(7) \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x;$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y &= e^{-\int 2xdx} (\int 4x \cdot e^{\int 2xdx} dx + C) \\ &= e^{-x^2} (\int 4x \cdot e^{x^2} dx + C) \\ &= e^{-x^2} (2e^{x^2} + C) = 2 + Ce^{-x^2}.\end{aligned}$$

$$(8) y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0;$$

$$\begin{aligned}\text{解 原方程变形为 } \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y \ln y} x &= \frac{1}{y} . \\ x &= e^{-\int \frac{1}{y \ln y} dy} (\int \frac{1}{y} \cdot e^{\int \frac{1}{y \ln y} dy} dy + C) \\ &= \frac{1}{\ln y} (\int \frac{1}{y} \cdot \ln y dy + C) \\ &= \frac{1}{\ln y} (\frac{1}{2} \ln^2 y + C) = \frac{1}{2} \ln y + \frac{C}{\ln y} .\end{aligned}$$

$$(9) (x-2) \frac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3;$$

$$\begin{aligned}\text{解 原方程变形为 } \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x-2} y &= 2(x-2)^2 . \\ y &= e^{\int \frac{1}{x-2} dx} [\int 2(x-2)^2 \cdot e^{-\int \frac{1}{x-2} dx} dx + C] \\ &= (x-2) [\int 2(x-2)^2 \cdot \frac{1}{x-2} dx + C] \\ &= (x-2) [(x-2)^2 + C] = (x-2)^3 + C(x-2).\end{aligned}$$

$$(10) (y^2 - 6x) \frac{dy}{dx} + 2y = 0 .$$

解 原方程变形为 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{1}{2}y$.

$$x = e^{\int \frac{3}{y} dy} \left[\int \left(-\frac{1}{2}y\right) \cdot e^{-\int \frac{3}{y} dy} dy + C \right]$$

$$= y^3 \left(-\frac{1}{2} \int y \cdot \frac{1}{y^3} dy + C\right)$$

$$= y^3 \left(\frac{1}{2y} + C\right) = \frac{1}{2}y^2 + Cy^3.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \sec x$, $y|_{x=0}=0$;

解 $y = e^{\int \tan x dx} \left(\int \sec x \cdot e^{-\int \tan x dx} dx + C \right)$

$$= \frac{1}{\cos x} \left(\int \sec x \cdot \cos x dx + C \right) = \frac{1}{\cos x} (x + C).$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C=0$, 故所求特解为 $y=x \sec x$.

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$, $y|_{x=\pi}=1$;

解 $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$

$$= \frac{1}{x} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot x dx + C \right) = \frac{1}{x} (-\cos x + C).$$

由 $y|_{x=\pi}=1$, 得 $C=\pi-1$, 故所求特解为 $y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$.

(3) $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x}$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$;

解 $y = e^{-\int \cot x dx} \left(\int 5e^{\cos x} \cdot e^{\int \cot x dx} dx + C \right)$

$$= \frac{1}{\sin x} \left(\int 5e^{\cos x} \cdot \sin x dx + C \right) = \frac{1}{\sin x} (-5e^{\cos x} + C).$$

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$, 得 $C=1$, 故所求特解为 $y=\frac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x}+1)$.

(4) $\frac{dy}{dx} + 3y = 8$, $y|_{x=0}=2$;

$$\begin{aligned}\text{解 } y &= e^{-\int 3dx} (\int 8 \cdot e^{\int 3dx} dx + C) \\ &= e^{-3x} (8 \int e^{3x} dx + C) = e^{-3x} (\frac{8}{3} e^{3x} + C) = \frac{8}{3} + C e^{-3x}.\end{aligned}$$

由 $y|_{x=0}=2$, 得 $C=-\frac{2}{3}$, 故所求特解为 $y=\frac{2}{3}(4-e^{-3x})$.

$$(5) \frac{dy}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3} y = 1, y|_{x=1}=0.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y &= e^{-\int \frac{2-3x^2}{x^3} dx} (\int 1 \cdot e^{\int \frac{2-3x^2}{x^3} dx} dx + C) \\ &= x^3 e^{\frac{1}{x^2}} (\int \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} dx + C) = x^3 e^{\frac{1}{x^2}} (\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + C).\end{aligned}$$

由 $y|_{x=1}=0$, 得 $C=-\frac{1}{2e}$, 故所求特解为 $y=\frac{1}{2}x^3(1-e^{\frac{1}{x^2}-1})$.

3. 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x+y$.

解 由题意知 $y'=2x+y$, 并且 $y|_{x=0}=0$.

由通解公式得

$$\begin{aligned}y &= e^{\int dx} (\int 2xe^{-\int dx} dx + C) = e^x (2 \int xe^{-x} dx + C) \\ &= e^x (-2xe^{-x} - 2e^{-x} + C) = Ce^x - 2x - 2.\end{aligned}$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C=2$, 故所求曲线的方程为 $y=2(e^x-x-1)$.

4. 设有一质量为 m 的质点作直线运动, 从速度等于零的时刻起, 有一个与运动方向一至、大小与时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用于它, 此外还受一与速度成正比(比例系数为 k_2)的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.

解 由牛顿定律 $F=ma$, 得 $m \frac{dv}{dt} = k_1 t - k_2 v$, 即 $\frac{dv}{dt} + \frac{k_2}{m} v = \frac{k_1}{m} t$.

由通解公式得

$$\begin{aligned}v &= e^{-\int \frac{k_2}{m} dt} (\int \frac{k_1}{m} t e^{\int \frac{k_2}{m} dt} dt + C) = e^{-\frac{k_2}{m} t} (\int \frac{k_1}{m} t \cdot e^{\frac{k_2}{m} t} dt + C) \\ &= e^{-\frac{k_2}{m} t} (\frac{k_1}{k_2} t e^{\frac{k_2}{m} t} - \frac{k_1 m}{k_2^2} e^{\frac{k_2}{m} t} + C).\end{aligned}$$

由题意, 当 $t=0$ 时 $v=0$, 于是得 $C=\frac{k_1 m}{k_2^2}$. 因此

$$v=e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1 m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+\frac{k_1 m}{k_2^2}\right)$$

即
$$v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1 m}{k_2^2}(1-e^{-\frac{k_2}{m}t}).$$

5. 设有一个由电阻 $R=10\Omega$ 、电感 $L=2\text{h}$ (亨)和电源电压 $E=20\sin 5t$ V(伏)串联组成的电路. 开关 K 合上后, 电路中有电源通过. 求电流 i 与时间 t 的函数关系.

解 由回路电压定律知

$$20\sin 5t-2\frac{di}{dt}-10i=0, \text{ 即 } \frac{di}{dt}+5i=10\sin 5t.$$

由通解公式得

$$i=e^{-\int 5dt}\left(\int 10\sin 5t\cdot e^{\int 5dt}dt+C\right)=\sin 5t-\cos 5t+Ce^{-5t}.$$

因为当 $t=0$ 时 $i=0$, 所以 $C=1$. 因此

$$i=\sin 5t-\cos 5t+e^{-5t}=e^{-5t}+\sqrt{2}\sin\left(5t-\frac{\pi}{4}\right)(\text{A}).$$

6. 设曲 $\int_L yf(x)dx+[2xf(x)-x^2]dy$ 在右半平面($x>0$)内与路径无关, 其中 $f(x)$ 可导, 且 $f(1)=1$, 求 $f(x)$.

解 因为当 $x>0$ 时, 所给积分与路径无关, 所以

$$\frac{\partial}{\partial y}[yf(x)]=\frac{\partial}{\partial x}[2xf(x)-x^2],$$

即
$$f(x)=2f(x)+2xf'(x)-2x,$$

或
$$f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=1.$$

因此
$$f(x)=e^{-\int \frac{1}{2x}dx}\left(\int 1e^{\int \frac{1}{2x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int \sqrt{x}dx+C\right)=\frac{2}{3}x+\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

由 $f(1)=1$ 可得 $C=\frac{1}{3}$, 故 $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3\sqrt{x}}.$

7. 求下列伯努利方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x);$

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = \cos x - \sin x, \text{ 即 } \frac{d(y^{-1})}{dx} - y^{-1} = \sin x - \cos x.$$

$$\begin{aligned} y^{-1} &= e^{\int dx} \left[\int (\sin x - \cos x) \cdot e^{-\int dx} dx + C \right] \\ &= e^{-x} \left[\int (\cos x - \sin x) e^x dx + C \right] = Ce^x - \sin x, \end{aligned}$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y} = Ce^x - \sin x$.

$$(2) \frac{dy}{dx} - 3xy = xy^2;$$

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} - 3x \frac{1}{y} = x, \text{ 即 } \frac{d(y^{-1})}{dx} + 3xy^{-1} = -x.$$

$$\begin{aligned} y^{-1} &= e^{-\int 3xdx} \left[\int (-x) \cdot e^{\int 3xdx} dx + C \right] \\ &= e^{-\frac{3}{2}x^2} \left(-\int x e^{\frac{3}{2}x^2} dx + C \right) \\ &= e^{-\frac{3}{2}x^2} \left(-\frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}x^2} + C \right) = Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y} = Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3}$.

$$(3) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4;$$

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^4} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{3} \frac{1}{y^3} = \frac{1}{3}(1-2x), \text{ 即 } \frac{d(y^{-3})}{dx} - y^{-3} = 2x - 1.$$

$$\begin{aligned} y^{-3} &= e^{\int dx} \left[\int (2x-1) e^{-\int dx} dx + C \right] \\ &= e^x \left[\int (2x-1) e^{-x} dx + C \right] = -2x - 1 + Ce^x, \end{aligned}$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y^3} = Ce^x - 2x - 1$.

$$(4) \frac{dy}{dx} - y = xy^5;$$

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^5} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y^4} = x, \text{ 即 } \frac{d(y^{-4})}{dx} + 4y^{-4} = -4x.$$

$$y^{-4} = e^{-\int 4dx} [\int (-4x) e^{\int 4dx} dx + C]$$

$$= e^{-4} (-4 \int x e^{4x} dx + C)$$

$$= -x + \frac{1}{4} + C e^{-4x},$$

$$\text{原方程的通解为 } \frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + C e^{-4x}.$$

$$(5) xdy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0.$$

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^3} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} = (1 + \ln x), \text{ 即 } \frac{d(y^{-2})}{dx} + \frac{2}{x} y^{-2} = -2(1 + \ln x).$$

$$y^{-2} = e^{-\int \frac{2}{x} dx} [-2 \int (1 + \ln x) \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C]$$

$$= \frac{1}{x^2} [-2 \int (1 + \ln x) x^2 dx + C]$$

$$= \frac{C}{x^2} - \frac{2}{3} x \ln x - \frac{4}{9} x,$$

$$\text{原方程的通解为 } \frac{1}{y^2} = \frac{C}{x^2} - \frac{2}{3} x \ln x - \frac{4}{9} x.$$

8. 验证形如 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ 的微分方程, 可经变量代换 $v = xy$ 化为可分离变量的方程, 并求其通解.

解 原方程可变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-yf(xy)}{xg(xy)}.$$

在代换 $v = xy$ 下原方程化为

$$\frac{x \frac{dv}{dx} - v}{x^2} = -\frac{vf(v)}{x^2 g(v)},$$

即
$$\frac{g(v)}{v[g(v)-f(v)]}du = \frac{1}{x}dx,$$

积分得
$$\int \frac{g(v)}{v[g(v)-f(v)]}du = \ln x + C,$$

对上式求出积分后, 将 $v=xy$ 代回, 即得通解.

9. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程, 然后求出通解:

(1)
$$\frac{dy}{dx} = (x+y)^2;$$

解 令 $u=x+y$, 则原方程化为

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2, \text{ 即 } dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

两边积分得

$$x = \arctan u + C.$$

将 $u=x+y$ 代入上式得原方程的通解

$$x = \arctan(x+y) + C, \text{ 即 } y = -x + \tan(x-C).$$

(2)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1;$$

解 令 $u=x-y$, 则原方程化为

$$1 - \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + 1, \text{ 即 } dx = -u du.$$

两边积分得

$$x = -\frac{1}{2}u^2 + C_1.$$

将 $u=x-y$ 代入上式得原方程的通解

$$x = -\frac{1}{2}(x-y)^2 + C_1, \text{ 即 } (x-y)^2 = -2x + C (C=2C_1).$$

(3)
$$xy' + y = y(\ln x + \ln y);$$

解 令 $u=xy$, 则原方程化为

$$x\left(\frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2}\right) + \frac{u}{x} = \frac{u}{x} \ln u, \text{ 即 } \frac{1}{x} dx = \frac{1}{u \ln u} du.$$

两边积分得

$$\ln x + \ln C = \ln \ln u, \text{ 即 } u = e^{Cx}.$$

将 $u=xy$ 代入上式得原方程的通解

$$xy = e^{Cx}, \text{ 即 } y = \frac{1}{x} e^{Cx}.$$

(4)
$$y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1;$$

解 原方程变形为

$$y'=(y+\sin x-1)^2-\cos x.$$

令 $u=y+\sin x-1$, 则原方程化为

$$\frac{du}{dx}-\cos x=u^2-\cos x, \text{ 即 } \frac{1}{u^2}du=dx.$$

两边积分得

$$-\frac{1}{u}=x+C.$$

将 $u=y+\sin x-1$ 代入上式得原方程的通解

$$-\frac{1}{y+\sin x-1}=x+C, \text{ 即 } y=1-\sin x-\frac{1}{x+C}.$$

$$(5)y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0.$$

解 原方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y(xy+1)}{x(1+xy+x^2y^2)}.$$

令 $u=xy$, 则原方程化为

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u}{x^2}=-\frac{u(u+1)}{x^2(1+u+u^2)}, \text{ 即 } \frac{1}{x}\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{x^2(1+u+u^2)}.$$

分离变量得

$$\frac{1}{x}dx=(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u})du.$$

两边积分得

$$\ln x+C_1=-\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{u}+\ln u.$$

将 $u=xy$ 代入上式得原方程的通解

$$\ln x+C_1=-\frac{1}{2x^2y^2}-\frac{1}{xy}+\ln xy,$$

即 $2x^2y^2\ln y-2xy-1=Cx^2y^2(C=2C_1).$

习题 12-5

1. 判别下列方程中哪些是全微分方程, 并求全微分方程的通解:

$$(1)(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0;$$

解 这里 $P=3x^2+6xy^2$, $Q=6x^2y+4y^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (6x^2y+4y^2) dy = C,$$

即
$$x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C.$$

$$(2)(a^2-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy=0;$$

解 这里 $P=a^2-2xy-y^2$, $Q=-(x+y)^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x a^2 dx - \int_0^y (x+y)^2 dy = C,$$

即
$$a^2x-x^2y-xy^2=C.$$

$$(3)e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0;$$

解 这里 $P=e^y$, $Q=xe^y-2y$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x e^0 dx + \int_0^y (xe^y - 2y) dy = C,$$

即
$$xe^y - y^2 = C.$$

$$(4)(x\cos y + \cos x)y' - y\sin x + \sin y = 0;$$

解 原方程变形为 $(x\cos y + \cos x)dy - (y\sin x + \sin y)dx = 0$.

这里 $P=-(y\sin x + \sin y)$, $Q=x\cos y + \cos x$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - \sin x = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x 0 dx + \int_0^y (x \cos y + \cos x) dy = C,$$

即 $x \sin y + y \cos x = C$.

解

$$(5)(x^2 - y)dx - xdy = 0;$$

解 这里 $P = x^2 - y$, $Q = -x$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x x^2 dx - \int_0^y x dy = C,$$

即 $\frac{1}{3}x^3 - xy = C$.

$$(6)y(x - 2y)dx - x^2 dy = 0;$$

解 这里 $P = y(x - 2y)$, $Q = -x^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x - 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x,$$

所以此方程不是全微分方程.

$$(7)(1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta = 0;$$

解 这里 $P = 1 + e^{2\theta}$, $Q = 2\rho e^{2\theta}$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{2\theta} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^\rho 2d\rho + \int_0^\theta 2\rho e^{2\theta} d\theta = C,$$

即 $\rho(e^{2\theta} + 1) = C$.

$$(8)(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$$

解 这里 $P = x^2 + y^2$, $Q = xy$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y,$$

所以此方程不是全微分方程.

2. 利用观察法求出下列方程的积分因子, 并求其通解:

$$(1)(x+y)(dx-dy)=dx+dy;$$

解 方程两边同时乘以 $\frac{1}{x+y}$ 得

$$dx-dy=\frac{dx+dy}{x+y}, \text{ 即 } d(x-y)=d\ln(x+y),$$

所以 $\frac{1}{x+y}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$x-y=\ln(x+y)+C.$$

$$(2)ydx-xdy+y^2xdx=0;$$

解 方程两边同时乘以 $\frac{1}{y^2}$ 得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+xdx=0, \text{ 即 } d\left(\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{x^2}{2}\right)=0,$$

所以 $\frac{1}{y^2}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C.$$

$$(3)y^2(x-3y)dx+(1-3y^2x)dy=0;$$

解 原方程变形为

$$xy^2dx-3y^3dx+dy-3x^2dy=0,$$

两边同时乘以 $\frac{1}{y^2}$ 并整理得

$$xdx+\frac{dy}{y^2}-(3ydx+3xdy)=0, \text{ 即 } d\left(\frac{x^2}{2}\right)-d\left(\frac{1}{y}\right)-3d(xy)=0,$$

所以 $\frac{1}{y^2}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{y}-3xy=C.$$

$$(4)xdx+ydy=(x^2+y^2)dx;$$

解 方程两边同时乘以 $\frac{1}{x^2+y^2}$ 得

$$\frac{xdx+dy}{x^2+y^2}-dx=0, \text{ 即 } d[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)]-dx=0,$$

所以 $\frac{1}{x^2+y^2}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$x^2+y^2=Ce^{2x}.$$

$$(5)(x-y^2)dx+2xydy=0;$$

解 原方程变形为

$$xdx-y^2dx+2xydy=0,$$

两边同时乘以 $\frac{1}{x^2}$ 得

$$\frac{dx}{x}+\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=0, \text{ 即 } d(\ln x)+d(\frac{y^2}{x})=0,$$

所以 $\frac{1}{x^2}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\ln x+\frac{y^2}{x}=C, \text{ 即 } x\ln x+y^2=Cx.$$

$$(6)2ydx-3xy^2dx-xdy=0.$$

解 方程两边同时乘以 x 得

$$2xydx-x^2dy-3x^2y^2dx=0, \text{ 即 } yd(x^2)-x^2dy-3x^2y^2dx=0,$$

再除以 y^2 得

$$\frac{yd(x^2)-x^2dy}{y^2}-3x^2dx=0, \text{ 即 } d(\frac{x^2}{y}-x^3)=0$$

所以 $\frac{x}{y^2}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\frac{x^2}{y}-x^3=0.$$

3. 验证 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 是微分方程 $yf(xy)dx+yg(xy)dy=0$ 的积分因子, 并求下列方程

的通解:

解 方程两边乘以 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 得

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}[yf(xy)dx+xg(xy)dy]=0,$$

这里 $P=\frac{f(xy)}{x[f(xy)-g(xy)]}$, $Q=\frac{g(xy)}{y[f(xy)-g(xy)]}$.

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{f(xy)g'(xy)-f'(xy)g(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

所以 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 是原方程的一个积分因子.

$$(1)y(x^2y^2+2)dx+x(2-2x^2y^2)dy=0;$$

解 这里 $f(xy)=x^2y^2+2$, $g(xy)=2-2x^2y^2$, 所以

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{3x^3y^3}$$

是方程的一个积分因子. 方程两边同乘以 $\frac{1}{3x^3y^3}$ 得全微分方程

$$\frac{x^2+2}{3x^3y^2}dx+\frac{2-x^2y^2}{3x^2y^3}dy=0,$$

其通解为

$$\int_1^x \frac{x^2+2}{3x^3}dx+\int_1^y \frac{2-x^2y^2}{3x^2y^3}dy=C,$$

即 $\frac{1}{3}(\ln x - \ln y^2 + 1 - \frac{1}{x^2y^2})=C$, 或 $x=Cy^2e^{\frac{1}{x^2y^2}}$.

$$(2)y(2xy+1)dx+x(1+2xy-x^3y^3)dy=0.$$

解 这里 $f(xy)=2xy+1$, $g(xy)=1+2xy-x^3y^3$, 所以

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{x^4y^4}$$

是方程的一个积分因子. 方程两边同乘以 $\frac{1}{x^4y^4}$ 得全微分方程

$$\frac{2xy+1}{x^4y^3}dx+\frac{1+2xy-x^3y^3}{x^3y^4}dy=0,$$

其通解为

$$\int_1^x \frac{2x+1}{x^4} dx + \int_1^y \frac{1+2xy-x^3y^3}{x^3y^4} dy = C,$$

即 $\frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{3x^3y^3} + \ln|y| = C.$

4. 用积分因子法解下列一阶线性方程:

(1) $xy' + 2y = 4\ln x$;

解 原方程变为 $y' + \frac{2}{x}y = \frac{4}{x}\ln x$, 其积分因子为

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2,$$

在方程 $y' + \frac{2}{x}y = \frac{4}{x}\ln x$ 的两边乘以 x^2 得

$$x^2y' + 2xy = 4x \ln x, \text{ 即 } (x^2y)' = 4x \ln x,$$

两边积分得

$$x^2y = \int 4x \ln x dx = 2x^2 \ln x - x^2 + C,$$

原方程的通解为 $y = 2\ln x - 1 + \frac{C}{x^2}.$

(2) $y' - \tan x \cdot y = x.$

解 积分因子为 $\mu(x) = e^{-\int \tan x dx} = \cos x,$

在方程的两边乘以 $\cos x$ 得

$$\cos x \cdot y' - \sin x \cdot y = x \cos x, \text{ 即 } (\cos x \cdot y)' = x \cos x,$$

两边积分得

$$\cos x \cdot y = \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C,$$

方程的通解为 $y = x \tan x + 1 + \frac{C}{\cos x}.$

习题 12-6

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $y''=x+\sin x$;

解 $y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1$,

$$y=\int(\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1)dx=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2.$$

(2) $y'''=xe^x$;

解 $y''=\int xe^x dx=xe^x-e^x+2C_1$,

$$y'=\int(xe^x-e^x+2C_1)dx=xe^x-2e^x+2C_1x+C_2,$$

$$y=\int(xe^x-2e^x+2C_1x+C_2)dx=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3,$$

原方程的通解为

$$y=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3.$$

(3) $y''=\frac{1}{1+x^2}$;

解 $y'=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C_1$

$$y=\int(\arctan x+C_1)dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx+C_1x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_1x+C_2.$$

(4) $y''=1+y'^2$;

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$$p'=1+p^2, \text{ 即 } \frac{1}{1+p^2}dp=dx,$$

两边积分得

$$\arctan p=x+C_1, \text{ 即 } y'=p=\tan(x+C_1),$$

$$y = \int \tan(x+C_1) dx = -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2,$$

原方程的通解为

$$y = -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2.$$

$$(5) y'' = y' + x;$$

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$$p' - p = x,$$

由一阶线性非齐次方程的通解公式得

$$p = e^{\int dx} \left(\int x \cdot e^{-\int dx} dx + C_1 \right) = e^x \left(\int x e^{-x} dx + C_1 \right) = C_1 e^x - x - 1,$$

$$\text{即 } y' = C_1 e^x - x - 1,$$

$$\text{于是 } y = \int (C_1 e^x - x - 1) dx = C_1 e^x - \frac{1}{2} x^2 - x + C_2,$$

原方程的通解为

$$y = C_1 e^x - \frac{1}{2} x^2 - x + C_2.$$

$$(6) xy'' + y' = 0;$$

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$$x p' + p = 0, \text{ 即 } p' + \frac{1}{x} p = 0,$$

由一阶线性齐次方程的通解公式得

$$p = C_1 e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C_1 e^{-\ln x} = \frac{C_1}{x},$$

$$\text{即 } y' = \frac{C_1}{x},$$

$$\text{于是 } y = \int \frac{C_1}{x} dx = C_1 \ln x + C_2,$$

原方程的通解为

$$y = C_1 \ln x + C_2.$$

$$(7) yy'' + y' = y'^2;$$

解 令 $p=y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$y p \frac{dp}{dy} + 1 = p^2, \text{ 即 } \frac{p}{p^2 - 1} dp = \frac{1}{y} dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln|p^2-1|=\ln|y|+\ln|C_1|, \text{ 即 } p^2-1\pm C_1^2y^2.$$

当 $|y'|=|p|>1$ 时, 方程变为

$$y'=\pm\sqrt{1+C_1^2y^2}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{1+(C_1y)^2}}dy=\pm dx,$$

两边积分得

$$\operatorname{arcsinh}(C_1y)=\pm C_1x+C_2,$$

即原方程的通解为

$$y=\frac{1}{C_1}\operatorname{sh}(C_2\pm C_1x).$$

当 $|y'|=|p|<1$ 时, 方程变为

$$y'=\pm\sqrt{1-C_1^2y^2}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{1-(C_1y)^2}}dy=\pm dx,$$

两边积分得

$$\arcsin(C_1y)=\pm C_1x+C_2,$$

即原方程的通解为

$$y=\frac{1}{C_1}\sin(C_2\pm C_1x).$$

$$(8)y^3y''-1=0;$$

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$y^3p\frac{dp}{dy}-1=0, \text{ 即 } pdp=y^{-3}dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{2}y^{-2}+\frac{1}{2}C_1, \text{ 即 } p^2=-y^{-2}+C_1,$$

故 $y'=\pm\sqrt{C_1-y^{-2}}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{C_1-y^{-2}}}dy=\pm dx,$

两边积分得

$$\sqrt{C_1y^2-1}=\pm(C_1x+C_2),$$

即原方程的通解为

$$C_1y^2=(C_1x+C_2)^2.$$

$$(9) y'' = \frac{1}{\sqrt{y}};$$

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}, \text{ 即 } p dp = \frac{1}{\sqrt{y}} dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}p^2 = 2\sqrt{y} + 2C_1, \text{ 即 } p^2 = 4\sqrt{y} + 4C_1,$$

故 $y' = \pm 2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$, 即 $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} dy = \pm dx$,

两边积分得原方程的通

$$x = \pm \left[\frac{2}{3}(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1\sqrt{\sqrt{y} + C_1} \right] + C_2.$$

$$(10) y'' = y'^3 + y'.$$

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy} = p^3 + p, \text{ 即 } p\left[\frac{dp}{dy} - (1 + p^2)\right] = 0.$$

由 $p=0$ 得 $y=C$, 这是原方程的一个解.

由 $\frac{dp}{dy} - (1 + p^2) = 0$ 得

$$\arctan p = y - C_1, \text{ 即 } y' = p = \tan(y - C_1),$$

从而 $x + C_2 = \int \frac{1}{\tan(y - C_1)} dy = \ln \sin(y - C_1),$

故原方程的通解为

$$y = \arcsin e^{x+C_2} + C_1.$$

2. 求下列各微分方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) y^3 y'' + 1 = 0, y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0;$$

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0, \text{ 即 } pdp = -\frac{1}{y^3} dy,$$

两边积分得

$$p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1, \text{ 即 } y' = \pm \frac{\sqrt{1+C_1 y^2}}{y}.$$

$$\text{由 } y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0 \text{ 得 } C_1=-1, \text{ 从而 } y' = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

分离变量得

$$\pm \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = dx,$$

两边积分得

$$\pm \sqrt{1-y^2} = x + C_2, \text{ 即 } y = \pm \sqrt{1-(x+C_2)^2}.$$

$$\text{由 } y|_{x=1}=1 \text{ 得 } C_2=-1, y = \sqrt{1-(x-1)^2}, \text{ 从而原方程的通解为}$$

$$y = \sqrt{2x-x^2}.$$

$$(2) y'' - ay'^2 = 0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-1;$$

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$$\frac{dp}{dx} - ap^2 = 0, \text{ 即 } \frac{1}{p^2} dp = a dx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{p} = ax + C_1, \text{ 即 } y' = -\frac{1}{ax + C_1}.$$

$$\text{由 } y'|_{x=0}=-1 \text{ 得 } C_1=1, y' = -\frac{1}{ax+1}, \text{ 两边积分得}$$

$$y = -\frac{1}{a} \ln(ax+1) + C_2.$$

$$\text{由 } y|_{x=0}=0 \text{ 得 } C_2=0, \text{ 故所求特解为 } y = -\frac{1}{a} \ln(ax+1).$$

$$(3) y''' = e^{ax}, y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0;$$

$$\text{解 } y'' = \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C_1.$$

由 $y''|_{x=1}=0$ 得 $C_1 = -\frac{1}{a}e^a$.

$$y' = \int \left(\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}e^a \right) dx = \frac{1}{a^2}e^{ax} - \frac{1}{a}e^a x + C_2.$$

由 $y'|_{x=1}=0$ 得 $C_2 = \frac{1}{a}e^a - \frac{1}{a^2}e^a$.

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{1}{a^2}e^{ax} - \frac{1}{a}e^a x + \frac{1}{a}e^a - \frac{1}{a^2}e^a \right) dx \\ &= \frac{1}{a^3}e^{ax} - \frac{1}{2a}e^a x^2 + \frac{1}{a}e^a x - \frac{1}{a^2}e^a x + C_3. \end{aligned}$$

由 $y|_{x=1}=0$ 得 $C_3 = \frac{1}{a^2}e^a - \frac{1}{a}e^a + \frac{1}{2a}e^a - \frac{1}{a^3}e^a$, 故所求特解为

$$y = \frac{e^{ax}}{a^3} - \frac{e^a x^2}{2a} + \frac{e^a (a-1)x}{a^2} - \frac{e^a (2a-a^2-2)}{2a^3}.$$

(4) $y''=e^{2y}$, $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$;

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=e^{2y}, \text{ 即 } pdp=e^{2y}dy,$$

积分得

$$p^2=e^{2y}+C_1, \text{ 即 } y'=\pm\sqrt{e^{2y}+C_1}.$$

由 $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=-1$, 故 $y'=\pm\sqrt{e^{2y}-1}$, 从而

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2y}-1}}dy=\pm dx,$$

积分得

$$-\arcsin e^{-y}=\pm x+C_2.$$

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $C_2=-\frac{\pi}{2}$, 故

$$e^{-y}=\sin(\mp x-\frac{\pi}{2})=\cos x,$$

从而所求特解为 $y=-\ln\cos x$.

(5) $y''=3\sqrt{y}$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p \frac{dp}{dy} = 3\sqrt{y}, \text{ 即 } p dp = 3\sqrt{y} dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2} p^2 = 2y^{\frac{3}{2}} + 2C_1, \text{ 即 } y' = \pm 2\sqrt{y^{\frac{3}{2}} + C_1}.$$

$$\text{由 } y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2 \text{ 得 } C_1=0, y' = 2y^{\frac{3}{4}}, \text{ 从而 } y^{-\frac{3}{4}} dy = 2dx,$$

两边积分得

$$4y^{\frac{1}{4}} = 2x + C_2, \text{ 即 } y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}C_2\right)^4.$$

$$\text{由 } y|_{x=0}=1 \text{ 得 } C_2=4, \text{ 故原方程的特解为 } y = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^4.$$

$$(6) y'' + y'^2 = 1, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0.$$

解 令 $p=y'$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p \frac{dp}{dy} + p^2 = 1, \text{ 即 } \frac{dp^2}{dy} + 2p^2 = 2,$$

$$\text{于是 } p^2 = e^{-\int 2dy} \left(\int 2 \cdot e^{\int 2dy} dy + C_1 \right) = C_1 e^{-2y} + 1,$$

$$\text{即 } y' = \pm \sqrt{C_1 e^{-2y} + 1}.$$

$$\text{由 } y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0 \text{ 得 } C_1=-1, y' = \pm \sqrt{1 - e^{-2y}}.$$

$$\text{故 } \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2y}}} dy = \pm dx,$$

两边积分得

$$\ln(e^y + \sqrt{e^{2y} - 1}) = \pm x + C_2.$$

$$\text{由 } y|_{x=0}=0 \text{ 得 } C_2=0, \ln(e^y + \sqrt{e^{2y} - 1}) = \pm x,$$

从而得原方程的特解 $y = \ln ch x$.

3. 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0, 1)$ 且在此点与直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 相切的积分曲线.

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2}x^2 + C_1,$$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2.$$

由题意得 $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$.

由 $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$, 再由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$, 因此所求曲线为

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + 1.$$

4. 设有一质量为 m 的物体, 在空中由静止开始下落, 如果空气阻力为 $R=c^2v^2$ (其中 c 为常数, v 为物体运动的速度), 试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系.

解 以 $t=0$ 对应的物体位置为原点, 垂直向下的直线为 s 正轴, 建立坐标系.

由题设得

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg - c^2v^2 \\ s|_{t=0} = v|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

将方程分离变量得

$$\frac{mdv}{mg - c^2v^2} = dt,$$

两边积分得

$$\ln \left| \frac{cv + \sqrt{mg}}{cv - \sqrt{mg}} \right| = kt + C_1 \quad (\text{其中 } k = \frac{2c\sqrt{g}}{\sqrt{m}})$$

由 $v|_{t=0}=0$ 得 $C_1=0$, $\ln \left| \frac{cv + \sqrt{mg}}{cv - \sqrt{mg}} \right| = kt$, 即 $\frac{cv + \sqrt{mg}}{cv - \sqrt{mg}} = e^{kt}$.

因为 $mg > c^2v^2$, 故 $cv + \sqrt{mg} = (\sqrt{mg} - cv)e^{kt}$, 即

$$cv(1 + e^{kt}) = \sqrt{mg}(1 - e^{kt}),$$

或
$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\sqrt{mg}}{c} \cdot \frac{1 - e^{kt}}{1 + e^{kt}},$$

分离变量并积分得

$$s = -\frac{\sqrt{mg}}{ck} \ln \frac{1 + e^{-kt}}{1 + e^{kt}} + C_2.$$

由 $s|_{t=0}=0$ 得 $C_2=0$, 故所求函数关系为

$$s = -\frac{\sqrt{mg}}{ck} \ln \frac{1+e^{-kt}}{1+e^{kt}}, \text{ 即 } s = \frac{m}{c^2} \ln \operatorname{ch}(c\sqrt{\frac{g}{m}}t).$$

习题 12-7

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

(1) x, x^2 ;

解 因为 $\frac{x^2}{x} = x$ 不恒为常数, 所以 x, x^2 是线性无关的.

(2) $x, 2x$;

解 因为 $\frac{2x}{x} = 2$, 所以 $x, 2x$ 是线性相关的.

(3) $e^{2x}, 3e^{2x}$;

解 因为 $\frac{3e^{2x}}{e^{2x}} = 3$, 所以 $e^{2x}, 3e^{2x}$ 是线性相关的.

(4) e^{-x}, e^x ;

解 因为 $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ 不恒为常数, 所以 e^{-x}, e^x 是线性无关的.

(5) $\cos 2x, \sin 2x$;

解 因为 $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$ 不恒为常数, 所以 $\cos 2x, \sin 2x$ 是线性无关的.

(6) $e^{x^2}, 2xe^{x^2}$;

解 因为 $\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}} = 2x$ 不恒为常数, 所以 $e^{x^2}, 2xe^{x^2}$ 是线性无关的.

(7) $\sin 2x, \cos x \cdot \sin x$;

解 因为 $\frac{\sin 2x}{\cos x \sin x} = 2$, 所以 $\sin 2x, \cos x \cdot \sin x$ 是线性相关的.

(8) $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$;

解 因为 $\frac{e^x \sin 2x}{e^x \cos 2x} = \tan 2x$ 不恒为常数, 所以 $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$ 是

线性无关的.

(9) $\ln x, x \ln x$;

解 因为 $\frac{x \ln x}{\ln x} = x$ 不恒为常数, 所以 $\ln x, x \ln x$ 是线性无关的.

(10) $e^{ax}, e^{bx} (a \neq b)$.

解 因为 $\frac{e^{bx}}{e^{ax}} = e^{(b-a)x}$ 不恒为常数, 所以 e^{ax}, e^{bx} 是线性无关的.

2. 验证 $y_1=\cos \omega x$ 及 $y_2=\sin \omega x$ 都是方程 $y''+\omega^2 y=0$ 的解, 并写出该方程的通解.

解 因为

$$y_1''+\omega^2 y_1=-\omega^2 \cos \omega x+\omega^2 \cos \omega x=0,$$

$$y_2''+\omega^2 y_2=-\omega^2 \sin \omega x+\omega^2 \sin \omega x=0,$$

并且 $\frac{y_1}{y_2}=\cot \omega x$ 不恒为常数, 所以 $y_1=\cos \omega x$ 与 $y_2=\sin \omega x$ 是方程的

线性无关解, 从而方程的通解为 $y=C_1 \cos \omega x+C_2 \sin \omega x$.

提示: $y_1'=-\omega \sin \omega x, y_1''=-\omega^2 \cos \omega x; y_2'=\omega \cos \omega x, y_2''=-\omega^2 \sin \omega x$.

3. 验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解, 并写出该方程的通解.

解 因为

$$y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-4x \cdot 2xe^{x^2}+(4x^2-2) \cdot e^{x^2}=0,$$

$$y_2''-4xy_2'+(4x^2-2)y_2=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}-4x \cdot (e^{x^2}+2x^2e^{x^2})+(4x^2-2) \cdot xe^{x^2}=0,$$

并且 $\frac{y_2}{y_1}=x$ 不恒为常数, 所以 $y_1=e^{x^2}$ 与 $y_2=2xe^{x^2}$ 是方程的线性无关解,

从而方程的通解为 $y=C_1e^{x^2}+C_22xe^{x^2}$.

提示: $y_1'=2xe^{x^2}, y_1''=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2};$

$$y_2'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}, y_2''=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}.$$

4. 验证:

(1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ (C_1, C_2 是任意常数)是方程

$$y''-3y'+2y=e^{5x}$$

的通解;

解 令 $y_1=e^x, y_2=e^{2x}, y^*=\frac{1}{12}e^{5x}$. 因为

$$y_1''-3y_1'+2y_1'=e^x-3e^x+2e^x=0,$$

$$y_2''-3y_2'+2y_2'=4e^{2x}-3(2e^{2x}+2e^{2x})=0,$$

且 $\frac{y_2}{y_1}=e^x$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的线性无关解, 从而 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$y^{*''}-3y^{*'}+2y^*=\frac{25}{12}e^{5x}-3\cdot\frac{5}{12}e^{5x}+2\cdot\frac{1}{12}e^{5x}=e^{5x},$$

所以 y^* 是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的特解.

因此 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ 是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解.

$$(2) y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x) \quad (C_1, C_2 \text{ 是任意常数})$$

是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解;

解 令 $y_1=\cos 3x, y_2=\sin 3x, y^*=\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$. 因为

$$y_1''+9y_1=-9\cos 3x+9\cos 3x=0,$$

$$y_2''+9y_2=-9\sin 3x+9\sin 3x=0,$$

且 $\frac{y_2}{y_1}=\tan 3x$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $y''+9y=0$ 的线性无关解, 从而 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$y^{*''}+9y^*=\frac{1}{32}(-9\sin x-4x\cos x)+9\cdot\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)=x\cos x,$$

所以 y^* 是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的特解.

因此 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$ 是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解.

(3) $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$ (C_1 、 C_2 是任意常数)是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解;

解 令 $y_1=x^2$, $y_2=x^2\ln x$. 因为

$$x^2y_1''-3xy_1'+4y_1=x^2\cdot 2-3x\cdot 2x+4\cdot x^2=0,$$

$$x^2y_2''-3xy_2'+4y_2=x^2\cdot (2\ln x+3)-3x\cdot (2x\ln x+x)+4\cdot x^2\ln x=0,$$

且 $\frac{y_2}{y_1}=\ln x$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的线性

无关解, 从而 $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$ 是方程的通解.

(4) $y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$ (C_1 、 C_2 是任意常数)是方程

$$x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$$

的通解;

解 令 $y_1=x^5$, $y_2=\frac{1}{x}$, $y^*=-\frac{x^2}{9}\ln x$. 因为

$$x^2y_1''-3xy_1'-5y_1=x^2\cdot 20x^3-3x\cdot 5x^4-5\cdot x^5=0,$$

$$x^2y_2''-3xy_2'-5y_2=x^2\cdot \frac{2}{x^3}-3x\cdot (-\frac{1}{x^2})-5\cdot \frac{1}{x}=0,$$

且 $\frac{y_1}{y_2}=x^6$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $x^2y''-3xy'-5y=0$ 的

线性无关解, 从而 $Y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$x^2y^{*''}-3xy^{*'}-5y^*$$

$$=x^2\cdot (-\frac{2}{9}\ln x-\frac{1}{3})-3x\cdot (-\frac{2x}{9}\ln x-\frac{x}{9})-5\cdot (-\frac{x^2}{9}\ln x)=x^2\ln x,$$

所以 y^* 是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的特解.

因此 $y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$ 是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的通解.

(5) $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}$ (C_1 、 C_2 是任意常数)是方程

$$xy''+2y'-xy=e^x$$

的通解;

解 令 $y_1 = \frac{1}{x}e^x$, $y_2 = \frac{1}{x}e^{-x}$, $y^* = \frac{e^x}{2}$. 因为

$$xy_1'' + 2y_1' - xy_1 = x \cdot \left(\frac{2e^x}{x^3} - \frac{2e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x} \right) + 2 \cdot \left(-\frac{e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x} \right) - x \cdot \frac{e^x}{x} = 0,$$

$$xy_2'' + 2y_2' - xy_2 = x \cdot \left(\frac{2e^{-x}}{x^3} + \frac{2e^{-x}}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x} \right) + 2 \cdot \left(-\frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} \right) - x \cdot \frac{e^{-x}}{x} = 0,$$

且 $\frac{y_1}{y_2} = e^{2x}$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $xy'' + 2y' - xy = 0$ 的

线性无关解, 从而 $Y = \frac{1}{x}(C_1e^x + C_2e^{-x})$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$xy^{*''} + 2y^{*'} - xy^* = x \cdot \frac{e^x}{2} + 2 \cdot \frac{e^x}{2} - x \cdot \frac{e^x}{2} = e^x,$$

所以 y^* 是方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的特解.

因此 $y = \frac{1}{x}(C_1e^x + C_2e^{-x}) + \frac{e^x}{2}$ 是方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的通解.

(6) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - x^2$ (C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 是任意常数) 是方程 $y^{(4)} - y = x^2$ 的通解.

解 令 $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$, $y^* = -x^2$. 因为

$$y_1^{(4)} - y_1 = e^x - e^x = 0,$$

$$y_2^{(4)} - y_2 = e^{-x} - e^{-x} = 0,$$

$$y_3^{(4)} - y_3 = \cos x - \cos x = 0,$$

$$y_4^{(4)} - y_4 = \sin x - \sin x = 0,$$

并且

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

所以 $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$ 是方程 $y^{(4)} - y = 0$ 的线性无关解,

从而 $Y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$ 是方程的通解.

又因为

$$y^{*(4)} - y^* = 0 - (-x^2) = x^2,$$

所以 $y^*= -x^2$ 是方程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的特解.

因此 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2$ 是方程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的通解.

提示:

$$\text{令 } k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3\cos x+k_4\sin x=0,$$

$$\text{则 } k_1e^x-k_2e^{-x}-k_3\sin x+k_4\cos x=0,$$

$$k_1e^x+k_2e^{-x}-k_3\cos x-k_4\sin x=0,$$

$$k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3\sin x-k_4\cos x=0.$$

上术等式构成的齐次线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

所以方程组只有零解, 即 $y_1=e^x, y_2=e^{-x}, y_3=\cos x, y_4=\sin x$ 线性无关.

习题 12-8

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''+y'-2y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+r-2=0, \text{ 即 } (r+2)(r-1)=0,$$

其根为 $r_1=1, r_2=-2$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

(2) $y''-4y'=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r=0, \text{ 即 } r(r-4)=0,$$

其根为 $r_1=0, r_2=4$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}.$$

(3) $y''+y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r_1=i, r_2=-i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

(4) $y''+6y'+13y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+6r+13=0,$$

其根为 $r_1=-3-2i, r_2=-3+2i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

(5) $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$4r^2-20r+25=0, \text{ 即 } (2r-5)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=\frac{5}{2}$, 故微分方程的通解为

$$x=C_1e^{\frac{5}{2}t}+C_2xe^{\frac{5}{2}t}, \text{ 即 } x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}.$$

(6) $y''-4y'+5y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+5=0,$$

其根为 $r_1=2-i$, $r_2=2+i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

$$(7)y^{(4)}-y=0;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^4-1=0, \text{ 即 } (r-1)(r+1)(r^2+1)=0$$

其根为 $r_1=1$, $r_2=-1$, $r_3=i$, $r_4=-i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

$$(8)y^{(4)}+2y''+y=0;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^4+r^2+1=0, \text{ 即 } (r^2+1)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=i$, $r_3=r_4=-i$, 故微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

$$(9)y^{(4)}-2y'''+y''=0;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^4-2r^3+r^2=0, \text{ 即 } r^2(r-1)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=0$, $r_3=r_4=1$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x.$$

$$(10)y^{(4)}+5y''-36=0.$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^4+5r^2-36=0,$$

其根为 $r_1=2$, $r_2=-2$, $r_3=3i$, $r_4=-3i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

$$(1)y''-4y'+3y=0, y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+3=0, \text{ 即 } (r-1)(r-3)=0,$$

其根为 $r_1=1$, $r_2=3$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

由 $y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10$, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ C_1 + 3C_2 = 10 \end{cases},$$

解之得 $C_1=4, C_2=2$. 因此所求特解为

$$y=4e^x+2e^{3x}.$$

(2) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$4r^2+4r+1=0, \text{ 即 } (2r+1)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=-\frac{1}{2}$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x).$$

由 $y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$, 得

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ -\frac{1}{2}C_1 + C_2 = 0 \end{cases},$$

解之得 $C_1=2, C_2=1$. 因此所求特解为

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}(2+x).$$

(3) $y''-3y'-4y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-5$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-3r-4=0, \text{ 即 } (r-4)(r+1)=0,$$

其根为 $r_1=-1, r_2=4$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}.$$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-5$, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + 4C_2 = -5 \end{cases},$$

解之得 $C_1=1, C_2=-1$. 因此所求特解为

$$y=e^{-x}-e^{4x}.$$

(4) $y''+4y'+29y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+4r+29=0,$$

其根为 $r_{1,2}=-2\pm 5i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x).$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C_1=0$, $y=C_2e^{-2x}\sin 5x$.

由 $y'|_{x=0}=15$, 得 $C_2=3$.

因此所求特解为 $y=3e^{-2x}\sin 5x$.

(5) $y''+25y=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=5$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+25=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm 5i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x.$$

由 $y|_{x=0}=2$, 得 $C_1=2$, $y=2\cos 5x+C_2\sin 5x$.

由 $y'|_{x=0}=5$, 得 $C_2=1$.

因此所求特解为 $y=2\cos 5x+\sin 5x$.

(6) $y''-4y'+13y=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=3$.

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+13=0,$$

其根为 $r_{1,2}=2\pm 3i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C_1=0$, $y=C_2e^{2x}\sin 3x$.

由 $y'|_{x=0}=3$, 得 $C_2=1$.

因此所求特解为 $y=e^{2x}\sin 3x$.

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动, 开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0 , 在运动过程中, 它受到一个力的作用, 这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数 $k_1>0$)而方向与初速一至. 又介质的阻力与速度成正比(比例系数 $k_2>0$). 求反映这质点的运动规律的函数.

解 设数轴为 x 轴, v_0 方向为正轴方向. 由题意得微分方程

$$x''=k_1x-k_2x', \text{ 即 } x''+k_2x'-k_1x=0,$$

其初始条件为 $x|_{t=0}=0$, $x'|_{t=0}=v_0$.

微分方程的特征方程为

$$r^2 + k_2 r - k_1 = 0,$$

其根为 $r_1 = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}$, $r_2 = \frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}$, 故微分方程的通解为

$$x = C_1 e^{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t}.$$

由 $x|_{t=0}=0$, $x'|_{t=0}=v_0$, 得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = v_0 \end{cases}$, 解之得

$$C_1 = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}, \quad C_2 = -\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}.$$

因此质点的运动规律为

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}} \left(e^{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} - e^{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} \right).$$

4. 在如图所示的电路中先将开关 K 拨向 A , 达到稳定状态后再将开关 K 拨向 B , 求电压 $u_c(t)$ 及电流 $i(t)$. 已知 $E=20\text{V}$, $C=0.5 \times 10^{-6}\text{F}$ (法), $L=0.1\text{H}$ (亨), $R=2000\Omega$.

解 由回路电压定律得

$$E = L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} - Ri = 0.$$

由于 $q = Cu_c$, 故 $i = \frac{dq}{dt} = Cu'_c$, $\frac{di}{dt} = Cu''_c$, 所以

$$-LCu''_c - u_c - RCu'_c = 0, \text{ 即 } u''_c + \frac{R}{L}u'_c + \frac{1}{LC}u_c = 0.$$

已知 $\frac{R}{L} = \frac{2000}{0.1} = 2 \times 10^4$, $\frac{1}{LC} = \frac{1}{0.1 \times 0.5 \times 10^{-6}} = \frac{1}{5} \times 10^8$, 故

$$u''_c + 2 \times 10^4 u'_c + \frac{1}{5} \times 10^8 u_c = 0.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2 + 2 \times 10^4 r + \frac{1}{5} \times 10^8 = 0,$$

其根为 $r_1 = -1.9 \times 10^4$, $r_2 = -10^3$, 故微分方程的通解为

$$u_c = C_1 e^{-1.9 \times 10^4 t} + C_2 e^{-10^3 t}.$$

由初始条件 $t=0$ 时, $u_c=20$, $u_c'=0$ 可得 $C_1 = -\frac{10}{9}$, $C_2 = \frac{190}{9}$.

因此所求电压为

$$u_c(t) = \frac{10}{9}(19e^{-10^3 t} - e^{-1.9 \times 10^4 t}) \text{ (V)}.$$

所求电流为

$$i(t) = \frac{19}{18} \times 10^{-2} (e^{-1.9 \times 10^4 t} - e^{-10^3 t}) \text{ (A)}.$$

5. 设圆柱形浮筒, 直径为 0.5m, 铅直放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2s, 求浮筒的质量.

解 设 ρ 为水的密度, S 为浮筒的横截面积, D 为浮筒的直径, 且设压下的位移为 x (如图所示), 则

$$f = -\rho g S \cdot x.$$

又 $f = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$, 因而

$$-\rho g S \cdot x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \text{ 即 } m \frac{d^2 x}{dt^2} + \rho g S x = 0.$$

微分方程的特征方程为 $mr^2 + \rho g S = 0$, 其根为

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} i,$$

故微分方程的通解为

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} t,$$

即
$$x = A \sin(\sqrt{\frac{\rho g S}{m}} t + \varphi).$$

由此得浮筒的振动的频率为 $\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}$.

因为周期为 $T=2$, 故 $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}} = 2$, $m = \frac{\rho g S}{\pi^2}$.

由 $\rho=1000\text{kg/m}^3$, $g=9.8\text{m/s}^2$, $D=0.5\text{m}$, 得

$$m=\frac{\rho g S}{\pi^2}=\frac{1000\times 9.8\times 0.5^2}{4\pi}=195\text{km}.$$

习题 12-9

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $2y'' + y' - y = 2e^x$;

解 微分方程的特征方程为

$$2r^2 + r - 1 = 0,$$

其根为 $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = -1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}.$$

因为 $f(x) = 2e^x$, $\lambda = 1$ 不是特征方程的根,
故原方程的特解设为

$$y^* = Ae^x,$$

代入原方程得

$$2Ae^x + Ae^x - Ae^x = 2e^x,$$

解得 $A = 1$, 从而 $y^* = e^x$.

因此, 原方程的通解为

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} + e^x.$$

(2) $y'' + a^2 y = e^x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2 + a^2 = 0,$$

其根为 $r = \pm ai$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

因为 $f(x) = e^x$, $\lambda = 1$ 不是特征方程的根,
故原方程的特解设为

$$y^* = Ae^x,$$

代入原方程得

$$Ae^x + a^2 Ae^x = e^x,$$

解得 $A = \frac{1}{1+a^2}$, 从而 $y^* = \frac{e^x}{1+a^2}$.

因此, 原方程的通解为

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{e^x}{1+a^2}.$$

(3) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$;

解 微分方程的特征方程为

$$2r^2 + 5r = 0,$$

其根为 $r_1=0$, $r_2=-\frac{5}{2}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

因为 $f(x)=5x^2-2x-1$, $\lambda=0$ 是特征方程的单根,
故原方程的特解设为

$$y^*=x(Ax^2+Bx+C),$$

代入原方程并整理得

$$15Ax^2+(12A+10B)x+(4B+5C)=5x^2-2x-1,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{3}{5}$, $C=\frac{7}{25}$, 从而 $y^*=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$$

$$(4)y''+3y'+2y=3xe^{-x};$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+3r+2=0,$$

其根为 $r_1=-1$, $r_2=-2$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

因为 $f(x)=3xe^{-x}$, $\lambda=-1$ 是特征方程的单根,
故原方程的特解设为

$$y^*=x(Ax+B)e^{-x},$$

代入原方程并整理得

$$2Ax+(2A+B)=3x,$$

比较系数得 $A=\frac{3}{2}$, $B=-3$, 从而 $y^*=e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x).$$

$$(5)y''-2y'+5y=e^x\sin 2x;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-2r+5=0,$$

其根为 $r_{1,2}=1\pm 2i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

因为 $f(x)=e^x\sin 2x$, $\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征方程的根,
故原方程的特解设为

$$y^*=xe^x(A\cos 2x+B\sin 2x),$$

代入原方程得

$$e^x[4B\cos 2x-4A\sin 2x]=e^x\sin 2x,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{4}$, $B=0$, 从而 $y^*=-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

$$(6)y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x};$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-6r+9=0,$$

其根为 $r_1=r_2=3$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^{3x}(C_1+C_2x).$$

因为 $f(x)=(x+1)e^{3x}$, $\lambda=3$ 是特征方程的重根,

故原方程的特解设为

$$y^*=x^2e^{3x}(Ax+B),$$

代入原方程得

$$e^{3x}(6Ax+2B)=e^{3x}(x+1),$$

比较系数得 $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{2}$, 从而 $y^*=e^{3x}(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2)$.

因此, 原方程的通解为

$$y=e^{3x}(C_1+C_2x)+e^{3x}(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2).$$

$$(7)y''+5y'+4y=3-2x;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+5r+4=0,$$

其根为 $r_1=-1$, $r_2=-4$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}.$$

因为 $f(x)=3-2x=(3-2x)e^{0x}$, $\lambda=0$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ax+B,$$

代入原方程得

$$4Ax+(5A+4B)=-2x+3,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{11}{8}$, 从而 $y^*=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}.$$

$$(8)y''+4y=x\cos x;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+4=0,$$

其根为 $r=\pm 2i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

因为 $f(x)=x\cos x=e^{0x}(x\cdot\cos x+0\cdot\sin x)$, $\lambda+i\omega=i$ 不是特征方程的根, 故原方程的特解设为

$$y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x,$$

代入原方程得

$$(3Ax+3B+2C)\cos x+(3Cx-2A+3D)\sin x=x\cos x,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{3}$, $B=0$, $C=0$, $D=\frac{2}{9}$, 从而 $y^*=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x.$$

$$(9)y''+y=e^x+\cos x;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r=\pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 其中 $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=\cos x$, 而方程 $y''+y=e^x$ 具有 Ae^x 形式的特解;

方程 $y''+y=\cos x$ 具有 $x(B\cos x+C\sin x)$ 形式的特解, 故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^x+x(B\cos x+C\sin x),$$

代入原方程得

$$2Ae^x+2C\cos x-2B\sin x=e^x+\cos x,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{2}$, $B=0$, $C=\frac{1}{2}$, 从而 $y^*=\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x.$$

$$(10)y''-y=\sin^2 x.$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-1=0,$$

其根为 $r_1=-1$, $r_2=1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

因为 $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, 而

方程 $y'' - y = \frac{1}{2}$ 的特解为常数 A ;

方程 $y'' - y = -\frac{1}{2}\cos 2x$ 具有 $B\cos 2x + C\sin 2x$ 形式的特解,

故原方程的特解设为

$$y^* = A + B\cos 2x + C\sin 2x,$$

代入原方程得

$$-A - 5B\cos 2x - 5C\sin 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

比较系数得 $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{10}$, $C = 0$, 从而 $y^* = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cos 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{2}.$$

2. 求下列各微分方程满足已给初始条件的特解:

(1) $y'' + y + \sin x = 0$, $y|_{x=\pi} = 1$, $y'|_{x=\pi} = 1$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2 + 1 = 0,$$

其根为 $r = \pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

因为 $f(x) = -\sin 2x = e^{0x}(0 \cdot \cos 2x - \sin 2x)$, $\lambda + i\omega = i$ 是特征方程的根,
故原方程的特解设为

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

代入原方程得

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = -\sin 2x,$$

解得 $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$, 从而 $y^* = \frac{1}{3}\sin 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

由 $y|_{x=\pi} = 1$, $y'|_{x=\pi} = 1$ 得 $C_1 = -1$, $C_2 = -\frac{1}{3}$,

故满足初始条件的特解为

$$y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

(2) $y'' - 3y' + 2y = 5$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

其根为 $r_1=1, r_2=2$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

容易看出 $y^*=\frac{5}{2}$ 为非齐次方程的一个特解,

故原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{5}{2}.$$

由 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 得

$$\begin{cases} C_1+C_2+\frac{5}{2}=1, \\ C_1+2C_2=2 \end{cases},$$

解之得 $C_1=-5, C_2=\frac{7}{2}$. 因此满足初始条件的特解为

$$y=-5e^x+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}.$$

$$(3)y''-10y'+9y=e^{2x}, \quad y|_{x=0}=\frac{6}{7}, \quad y'|_{x=0}=\frac{33}{7};$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-10r+9=0,$$

其根为 $r_1=1, r_2=9$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{9x}.$$

因为 $f(x)=e^{2x}, \lambda=2$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^{2x},$$

代入原方程得

$$(4A-20A+9A)e^{2x}=e^{2x},$$

解得 $A=-\frac{1}{7}$, 从而 $y^*=-\frac{1}{7}e^{2x}$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

由 $y|_{x=0}=\frac{6}{7}, y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$ 得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$.

因此满足初始条件的特解为

$$y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

$$(4)y''-y=4xe^x, \quad y|_{x=0}=0, \quad y'|_{x=0}=1;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-1=0,$$

其根为 $r_1=-1, r_2=1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

因为 $f(x)=4xe^x, \lambda=1$ 是特征方程的单根,
故原方程的特解设为

$$y^*=xe^x(Ax+B),$$

代入原方程得

$$(4Ax+2A+2B)e^x=4xe^x,$$

比较系数得 $A=1, B=-1$, 从而 $y^*=xe^x(x-1)$.

因此, 原方程的通解为

$$y^*=C_1e^{-x}+C_2e^x+xe^x(x-1).$$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1-C_2-1=1 \end{cases},$$

解之得 $C_1=1, C_2=-1$. 因此满足初始条件的特解为

$$y=e^{-x}-e^x+xe^x(x-1).$$

(5) $y''-4y'=5, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$.

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r=0,$$

其根为 $r_1=0, r_2=4$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{4x}.$$

因为 $f(x)=5=5e^{0 \cdot x}, \lambda=0$ 是特征方程的单根,
故原方程的特解设为

$$y^*=Ax,$$

代入原方程得

$$-4A=5, \quad A=-\frac{5}{4},$$

从而 $y^*=-\frac{5}{4}x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}-\frac{5}{4}x.$$

由 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=\frac{11}{16}, C_2=\frac{5}{16}$.

因此满足初始条件的特解为

$$y = \frac{11}{16} + \frac{5}{16}e^{4x} - \frac{5}{4}x.$$

3. 大炮以仰角 α 、初速度 v_0 发射炮弹, 若不计空气阻力, 求弹道曲线.

解 取炮口为原点, 炮弹前进的水平方向为 x 轴, 铅直向上为 y 轴, 弹道运动的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \\ \frac{dx}{dt} = 0 \end{cases},$$

且满足初始条件

$$\begin{cases} y|_{t=0} = 0, y'|_{t=0} = v_0 \sin \alpha \\ x|_{t=0} = 0, x'|_{t=0} = v_0 \cos \alpha \end{cases}.$$

易得满足方程和初始条件的解(弹道曲线)为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

4. 在 R 、 L 、 C 含源串联电路中, 电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 $E=20V$, $C=0.2\mu F$ (微法), $L=0.1H$ (亨), $R=1000\Omega$, 试求合上开关 K 后电流 $i(t)$ 及电压 $u_c(t)$.

解 (1)列方程. 由回路定律可知

$$L \cdot C \cdot u_c'' + R \cdot C \cdot u_c' + u_c = E,$$

即
$$u_c'' + \frac{R}{L} u_c' + \frac{1}{LC} u_c = \frac{E}{LC},$$

且当 $t=0$ 时, $u_c=0$, $u_c'=0$.

已知 $R=1000\Omega$, $L=0.1H$, $C=0.2\mu F$, 故

$$\frac{R}{L} = \frac{1000}{0.1} = 10^4,$$

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{0.1 \times 0.2 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^7,$$

$$\frac{E}{LC} = 5 \times 10^7 E = 5 \times 10^7 \times 20 = 10^9.$$

因此微分方程为 $u_c'' + 10^4 u_c' + 5 \times 10^7 u_c = 10^9$.

(2)解方程. 微分方程的特征方程为 $r^2 + 10^4 r + 5 \cdot 10^7 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = -5 \times 10^3 \pm 5 \times 10^3 i$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$u_c = e^{-5 \times 10^3 t} [C_1 \cos(5 \times 10^3 t) + C_2 \sin(5 \times 10^3 t)].$$

由观察法易知 $y^*=20$ 为非齐次方程的一个特解.

因此非齐次方程的通解为

$$u_c = e^{-5 \times 10^3 t} [C_1 \cos(5 \times 10^3 t) + C_2 \sin(5 \times 10^3 t)] + 20.$$

由 $t=0$ 时, $u_c=0$, $u'_c=0$, 得 $C_1=-20$, $C_2=-20$. 因此

$$u_c = 20 - 20e^{-5 \times 10^3 t} [\cos(5 \times 10^3 t) + \sin(5 \times 10^3 t)] \text{ (V)},$$

$$i(t) = Cu'_c = 0.2 \times 10^{-6} u'_c = 4 \times 10^{-2} e^{-5 \times 10^3 t} \sin(5 \times 10^3 t) \text{ (A)}.$$

5. 一链条悬挂在一钉子上, 起动时一端离开钉子 8m 另一端离开钉子 12m, 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需的时间:

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力;

解 设在时刻 t 时, 链条上较长的一段垂下 x m, 且设链条的密度为 ρ , 则向下拉链条下滑的作用力

$$F = x\rho g - (20-x)\rho g = 2\rho g(x-10).$$

由牛顿第二定律, 有

$$20\rho x'' = 2\rho g(x-10), \text{ 即 } x'' - \frac{g}{10}x = -g.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2 - \frac{g}{10} = 0,$$

其根为 $r_1 = -\sqrt{\frac{g}{10}}$, $r_2 = \sqrt{\frac{g}{10}}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$x = C_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}.$$

由观察法易知 $x^*=10$ 为非齐次方程的一个特解, 故通解为

$$x = C_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10.$$

由 $x(0)=12$ 及 $x'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=1$. 因此特解为

$$x = e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10.$$

当 $x=20$, 即链条完全滑下来时有 $e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} = 10$,

解之得所需时间

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln(5 + 2\sqrt{6}) \text{ s}.$$

(2)若摩擦力为 1m 长的链条的重量.

解 此时向下拉链条的作用力变为

$$F = x\rho g - (20-x)\rho g - 1\rho g = 2\rho gx - 21\rho g$$

由牛顿第二定律, 有

$$20\rho x'' = 2\rho gx - 21\rho g, \text{ 即 } x'' - \frac{g}{10}x = -1.05g.$$

微分方程的通解为

$$x = C_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10.5.$$

由 $x(0)=12$ 及 $x'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=\frac{3}{4}$. 因此特解为

$$x = \frac{3}{4}(e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}) + 10.5.$$

当 $x=20$, 即链条完全滑下来时有 $\frac{3}{4}(e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}) = 9.5$,

解之得所需时间

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln\left(\frac{19}{3} + \frac{4\sqrt{22}}{3}\right) \text{ s}.$$

6. 设函数 $\varphi(x)$ 连续, 且满足

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x \int_0^x \varphi(t)dt,$$

求 $\varphi(x)$.

解 等式两边对 x 求导得

$$\varphi'(x) = e^x - \int_0^x \varphi(t)dt,$$

再求导得微分方程

$$\varphi''(x) = e^x - \varphi(x), \text{ 即 } \varphi''(x) + \varphi(x) = e^x.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2 + 1 = 0,$$

其根为 $r_{1,2} = \pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$\varphi = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

易知 $\varphi^* = \frac{1}{2}e^x$ 是非齐次方程的一个特解,

故非齐次方程的通解为

$$\varphi = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x.$$

由所给等式知 $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=1$, 由此得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$.

因此

$$\varphi = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x).$$

总习题十二

1. 填空:

(1) $xy''' + 2x^2y'^2 + x^3y = x^4 + 1$ 是_____阶微分方程;

解 是 3 阶微分方程.

(2) 若 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 是全微分方程, 则函数 M 、 N 应满足_____;

$$\text{解 } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

(3) 与积分方程 $y = \int_{x_0}^x f(x, y)dx$ 等价的微分方程初值问题是_____;

解 方程两边对 x 求导得 $y' = f(x, y)$. 显然当 $x = x_0$ 时, $y = 0$.

因此与积分方程等价的微分方程初值问题是

$$y' = f(x, y), \quad y|_{x=x_0} = 0.$$

(4) 已知 $y=1$ 、 $y=x$ 、 $y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为_____.

解 容易证明非齐次线性微分方程的任意两个解的差是对应齐次线性微分方程的解. 因此 $y_1 = x - 1$ 和 $y_2 = x^2 - 1$ 都是对应齐次线性微分方程的解. 显然 y_1 与 y_2 是线性无关. 所以非齐次线性微分方程的通解为

$$y = C_1(x-1) + C_2(x^2-1) + 1.$$

2. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程:

(1) $(x+C)^2 + y^2 = 1$ (其中 C 为任意常数);

解 将等式变形

$$x + C = \pm \sqrt{1 - y^2},$$

两边对 x 求导得

$$1 = \pm \frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}},$$

从而 $1 - y^2 = y^2 y'^2$, 即所求微分方程为 $y^2(1 + y'^2) = 1$.

(2) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ (其中 C_1 、 C_2 为任意常数).

解 两边对 x 求导得

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} = y + C_2 e^{2x},$$

即 $y' = y + C_2 e^{2x}, \dots (1)$

再求导得

$$y'' = y' + 2C_2 e^{2x}. \dots (2)$$

(2)-(1)×2 得

$$y'' - 2y' = y' - 2y,$$

即所求微分方程为 $y'' - 3y' + 2y = 0$.

3. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy' + y = 2\sqrt{xy}$;

解 将方程变形为

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2x}\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ 即 } (\sqrt{y})' + \frac{1}{2x}\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

其通解为

$$\sqrt{y} = e^{-\int \frac{1}{2x} dx} \left(\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\int \frac{1}{2x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{\sqrt{x}}(x + C),$$

即原方程的通解为 $y = \frac{(x+C)^2}{x}$.

(2) $xy' \ln x + y = ax(\ln x + 1)$;

解 将方程变形为

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = a \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right),$$

其通解为

$$y = e^{-\int \frac{1}{x \ln x} dx} \left[\int a \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right) e^{\int \frac{1}{x \ln x} dx} dx + C \right] = \frac{1}{\ln x} (ax \ln x + C),$$

即原方程的通解为 $y = ax + \frac{C}{\ln x}$.

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2(\ln y - x)}$;

解 将方程变形为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y} x = \frac{2 \ln y}{y},$$

其通解为

$$x = e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left(\int \frac{2 \ln y}{y} e^{\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right) = \frac{1}{y^2} (y^2 \ln y - \frac{1}{2} y^2 + C),$$

即原方程的通解为 $x = \ln y - \frac{1}{2} + \frac{C}{y^2}$.

$$(4) \frac{dy}{dx} + xy - x^3 y^3 = 0;$$

解 将方程变形为

$$\frac{1}{y^3} \frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3, \text{ 即 } \frac{d(y^{-2})}{dx} - 2xy^{-2} = -2x^3,$$

其通解为

$$y^{-2} = e^{\int 2xdx} \left[\int (-2x^3) e^{-\int 2xdx} dx + C \right] = e^{x^2} (x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C),$$

即原方程的通解为 $y^{-2} = C e^{x^2} + x^2 + 1$.

$$(5) xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0;$$

解 因为

$$\begin{aligned} xdx + ydy &= d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right), \\ \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\arctan \frac{x}{y}\right), \end{aligned}$$

所以原方程可写成

$$d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \arctan \frac{x}{y}\right) = 0,$$

从而原方程的通解为

$$x^2 + y^2 + 2 \arctan \frac{x}{y} = C.$$

$$(6) yy'' - y'^2 - 1 = 0;$$

解 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0,$$

或
$$\frac{d(p^2)}{dy} - \frac{2}{y} p^2 = \frac{2}{y},$$

其通解为

$$p^2 = e^{\int \frac{2}{y} dy} \left(\int \frac{2}{y} e^{-\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right) = y^2 (-y^{-2} + C) = Cy^2 - 1.$$

于是 $y' = \pm \sqrt{Cy^2 - 1}$, 即 $\frac{dy}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = \pm dx \ (C = C_1^2),$

积分得

$$\ln(C_1 y + \sqrt{(C_1 y)^2 - 1}) = \pm x + C_2,$$

化简得原方程的通解 $y = \frac{1}{C_1} \text{ch}(\pm x + C_2).$

$$(7) y'' + 2y' + 5y = \sin 2x;$$

解 齐次方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$,
其根为 $r_{1,2} = -1 \pm 2i$.

因为 $f(x) = \sin 2x$, $\lambda + \omega i = 2i$ 不是特征方程的根,
所以非齐次方程的特解应设为

$$y^* = A \cos 2x + B \sin 2x,$$

代入原方程得

$$(A + 2B) \cos 2x + (B - 4A) \sin 2x = \sin 2x,$$

比较系数得 $A = -\frac{4}{17}$, $B = \frac{1}{17}$, $y^* = -\frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x.$

因此原方程的通解为

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x.$$

$$(8) y''' + y'' - 2y' = x(e^x + 4);$$

解 齐次方程 $y''' + y'' - 2y' = 0$ 的特征方程为 $r^3 + r^2 - 2r = 0$,
其根为 $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 2$.

齐次方程 $y''' + y'' - 2y' = 0$ 的通解为 $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$.

原方程中 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 其中 $f_1(x) = x e^x, f_2(x) = 4x$.

对于方程 $y''' + y'' - 2y' = x e^x$, 因为 $\lambda = 1$ 是特征方程的根, 故其特解可设为

$$y_1^* = x(Ax + B)e^x,$$

代入 $y''' + y'' - 2y' = x e^x$ 得

$$(6Ax + 8A + 3B)e^x = x e^x,$$

比较系数得 $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{4}{9}$, 故 $y_1^* = x(\frac{1}{6}x - \frac{4}{9})e^x$.

对于方程 $y''' + y'' - 2y' = 4x$, 因为 $\lambda = 0$ 是特征方程的根, 故其特解可设为

$$y_2^* = x(Cx + D),$$

代入 $y''' + y'' - 2y' = 4x$ 得

$$-4Cx + 2C - 2D = 4x,$$

比较系数得 $C = -1, D = -1$, 故 $y_2^* = x(-x - 1)$.

因此原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} + (\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x)e^x - x^2 - x.$$

$$(9) (y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0;$$

解 将原方程变形为

$$x \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y} x^2 = -y^3, \text{ 或 } \frac{d(x^2)}{dy} - \frac{6}{y} x^2 = -2y^3,$$

其通解为

$$x^2 = e^{\int \frac{6}{y} dy} [\int (-2y^3) e^{-\int \frac{6}{y} dy} dy + C] = y^6 (y^{-2} + C),$$

即原方程的通解为 $x^2 = y^4 + Cy^6$.

$$(10) y' + x = \sqrt{x^2 + y}.$$

解 令 $u = \sqrt{x^2 + y}$, 则 $y = u^2 - x^2$, $\frac{dy}{dx} = 2u \frac{du}{dx} - 2x$, 故原方程化为

$$2u \frac{du}{dx} - x = u, \text{ 即 } \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{u} \right) + \frac{1}{2}.$$

这是齐次方程, 因此令 $\frac{u}{x} = z$, 则 $u = xz$, $\frac{du}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$, 则上述齐次方程化为

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2}, \text{ 即 } x \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} \left(2z - \frac{1}{z} - 1 \right),$$

分离变量得

$$\frac{z dz}{2z^2 - z - 1} = -\frac{1}{2} \frac{dx}{x},$$

积分得 $\frac{1}{6} \ln(2z^3 - 3z^2 + 1) = -\frac{1}{2} \ln x + C_1,$

即 $2z^3 - 3z^2 + 1 = Cx^{-3} (C = e^{6C_1}).$

将 $z = \frac{u}{x}$ 代入上式得

$$2u^3 - 3xu^2 + x^3 = C,$$

再代入 $u = \sqrt{x^2 + y}$, 得原方程的通解 $2\sqrt{(x^2 + y)^3} - 2x^3 - 3xy = C.$

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0$, $x=1$ 时 $y=1$;

解 原方程变形为

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y} x = -\frac{2}{y^3} x^2,$$

即 $x^{-2} \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y} x^{-1} = -\frac{2}{y^3},$

或 $\frac{d(x^{-1})}{dy} + \frac{2}{y} x^{-1} = \frac{2}{y^3},$

其通解为

$$x^{-1} = e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left(\int \frac{2}{y^3} e^{\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right) = \frac{1}{y^2} (2 \ln y + C),$$

即原方程的通解为

$$y^2 = x(2 \ln y + C).$$

由 $y|_{x=1}=1$, 得 $C=1$. 故满足所给初始条件的特解为 $y^2=x(2\ln y+1)$.

(2) $y''-ay'^2=0$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=-1$;

解 令 $y'=p$, 则原方程化为

$$\frac{dp}{dx}-ap^2=0.$$

分离变量得

$$\frac{dp}{p^2}=adx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{p}=ax+C_1, \text{ 即 } y'=-\frac{1}{ax+C_1}.$$

代入初始条件 $y'(0)=-1$ 得 $C_1=1$,

故 $y'=-\frac{1}{ax+1}.$

方程两边积分得

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2.$$

代入初始条件 $y(0)=0$ 得 $C_2=0$.

因此满足所给初始条件的特解为 $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$.

(3) $2y''-\sin 2y=0$, $x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2}$, $y'=1$;

解 令 $y'=p$, 则原方程化为

$$2p\frac{dp}{dy}-\sin 2y=0.$$

分离变量得

$$2pdp=\sin 2ydy,$$

两边积分得

$$p^2=-\frac{1}{2}\cos 2y+C_1.$$

代入初始条件 $y'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$,

因而 $y'^2=-\frac{1}{2}\cos 2y+\frac{1}{2}=\sin^2 y$,

即 $y'=\sin y$.

分离变量得

$$\frac{dy}{\sin y}=dx,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos y}{1+\cos y}=x+C_2.$$

代入初始条件 $y(0)=\frac{\pi}{2}$ 得 $C_2=0$.

因此满足所给初始条件的特解为 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos y}{1+\cos y}$.

(4) $y''+2y'+y=\cos x$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=\frac{3}{2}$.

解 齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的特征方程为

$$r^2+2r+1=0,$$

其根为 $r_{1,2}=-1$.

齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$.

因为 $f(x)=\cos x$, $\lambda+\omega i=i$ 不是特征方程的根, 所以非齐次方程的特解应设为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入原方程得

$$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x,$$

比较系数得 $A=0$, $B=\frac{1}{2}$. 故 $y^*=\frac{1}{2}\sin x$. 从而原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x.$$

将初始条件代入通解得

$$\begin{cases} C_1=0 \\ -C_1+C_2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \end{cases},$$

解之得 $C_1=0$, $C_2=1$.

因此满足所给初始条件的特解为 $y = xe^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$.

5. 已知某曲线经过点(1, 1), 它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求它的方程.

解 设点(x, y)为曲线上任一点, 则曲线在该点的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x),$$

其在纵轴上的截距为 $y - xy'$, 因此由已知有

$$y - xy' = x, \text{ 即 } y' - \frac{1}{x}y = -1.$$

这是一个一阶线性方程, 其通解为

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int (-1)e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = x(-\ln x + C),$$

即方程的通解为 $y = x(C - \ln x)$.

由于曲线过点(1, 1), 所以 $C = 1$.

因此所求曲线的方程为 $y = x(1 - \ln x)$.

6. 已知某车间的容积为 $30 \times 30 \times 6 \text{ m}^3$, 其中的空气含 0.12% 的 CO_2 (以容积计算). 现以含 CO_2 0.04% 的新鲜空气输入, 问每分钟应输入多少, 才能在 30min 后使车间空气中 CO_2 的含量不超过 0.06%? (假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后, 以相同的流量排出).

解 设每分钟应输入的空气质量为 $a \text{ m}^3$, t 时刻车间中 CO_2 的浓度为 $x(t)$, 则车间中 CO_2 的含量 (以体积计算) 在 t 时刻经过 $dt \text{ min}$ 的改变量为

$$30 \times 30 \times 6 dx = 0.0004adt - axdt,$$

分离变量得

$$\frac{1}{x - 0.0004} dx = -\frac{a}{5400} dt,$$

由于 $x > 0.0004$, 故两边积分得

$$\ln(x - 0.0004) = -\frac{a}{5400}t + \ln C,$$

即
$$x = 0.0004 + Ce^{-\frac{a}{5400}t}.$$

由于开始时车间中的空气含 0.12% 的 CO_2 , 即当 $t = 0$ 时, $x = 0.0012$, 代入上式

得 $C = 0.0008$. 因此 $x = 0.0004 + 0.0008e^{-\frac{a}{5400}t}$.

$$\text{由上式得 } a = -\frac{5400}{t} \ln \frac{x-0.004}{0.0008}.$$

由于要求 30min 后车间中 CO_2 的含量不超过 0.06%，即当 $t=30$ 时， $x \leq 0.0006$ ，将 $t=30$ ， $x=0.0006$ 代入上式得 $a=180 \ln 4 \approx 250$ 。

因为 $x' = -\frac{0.0008}{5400} e^{-\frac{a}{5400}t} < 0$ ，所以 x 是 a 的减函数，考试当 $a \geq 250$ 时可保证

$x \leq 0.0006$ 。

因此每分钟输入新鲜空气的量不得小于 250m^3 。

7. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x) \cos x + 2 \int_0^x \varphi(t) \sin t dt = x + 1,$$

求 $\varphi(x)$ 。

解 在等式两边对 x 求导得

$$\varphi'(x) \cos x - \varphi(x) \sin x + 2\varphi(x) \sin x = 1,$$

即 $\varphi'(x) + \tan x \varphi(x) = \sec x$ 。

这是一个一阶线性方程，其通解为

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sec x e^{\int \tan x dx} dx + C \right) \\ &= \cos x (\tan x + C) = \sin x + C \cos x. \end{aligned}$$

在已知等式中，令 $x=0$ 得 $\varphi(0)=1$ ，代入通解得 $C=1$ 。故 $\varphi(x)=\sin x + \cos x$ 。

8. 设函数 $u=f(r)$ ， $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $r>0$ 内满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

其中 $f(r)$ 二阶可导，且 $f(1)=f'(1)=1$ 。试将拉普拉斯方程化为以 r 为自变量的常微分方程，并求 $f(r)$ 。

$$\text{解 因为 } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r},$$

$$\text{所以 } \frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} f'(r),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r-x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} f'(r) + \frac{x}{r} f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r^2-x^2}{r^3} f'(r) + \frac{x^2}{r^2} f'(r).$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{r^2-y^2}{r^3} f'(r) + \frac{y^2}{r^2} f'(r), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{r^2-z^2}{r^3} f'(r) + \frac{z^2}{r^2} f'(r).$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3} f'(r) + \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} f'(r) \\ &= \frac{2r^2}{r^3} f'(r) + f'(r) = \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \frac{d^2 u}{dr^2}. \end{aligned}$$

因此拉普拉斯方程化为

$$\frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \frac{d^2 u}{dr^2} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0.$$

令 $\frac{du}{dr} = p(r)$, 则以上方程进一步变成

$$\frac{2}{r} p + \frac{dp}{dr} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{dp}{dr} + \frac{2}{r} p = 0,$$

其通解为

$$p = C_1 e^{-\int \frac{2}{r} dr} = \frac{C_1}{r^2}, \quad \text{即} \quad \frac{du}{dr} = \frac{C_1}{r^2}.$$

由于 $f'(1)=1$, 即 $r=1$ 时 $\frac{du}{dr}=1$, 所以 $C_1=1$, $\frac{du}{dr} = \frac{1}{r^2}$.

在方程 $\frac{du}{dr} = \frac{1}{r^2}$ 的两边积分得

$$u = -\frac{1}{r} + C_2.$$

又由于 $f(1)=1$, 即 $r=1$ 时 $u=1$, 所以 $C_2=2$,

从而 $u = -\frac{1}{r} + 2$, 即 $f(r) = -\frac{1}{r} + 2$.

9. 设 $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解, 令

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

证明:

(1) $W(x)$ 满足方程 $W' + p(x)W = 0$;

证明 因为 $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$ 都是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解,

所以 $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$, $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$,

从而
$$\begin{aligned} W' + p(x)W &= (y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2') + p(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) \\ &= y_1[y_2'' + p(x)y_2'] - y_2[y_1'' + p(x)y_1'] \\ &= y_1[-q(x)y_2] - y_2[-q(x)y_1] \\ &= 0, \end{aligned}$$

即 $W(x)$ 满足方程 $W' + p(x)W = 0$.

(2) $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$.

证明 已知 $W(x)$ 满足方程

$$W' + p(x)W = 0,$$

分离变量得

$$\frac{dW}{W} = -p(x)dx.$$

将上式两边在 $[x_0, x]$ 上积分, 得

$$\ln W(x) - \ln W(x_0) = -\int_{x_0}^x p(t)dt,$$

即 $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$.